高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.)

1. B　2. A　3. D　4. B　5. C　6. A　7. C　8. A

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. BC　10. AB　11. ABD　12. AD

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. $\frac{4}{7}$　14. $\frac{1}{2}$　15. 2　16. $0<a\leqslant e$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由题意可知$\begin{cases} a_1+d=3 \\ 5a_1+\frac{5\times 4}{2}\times d=20 \end{cases}$ …………………… 2 分

解得$\begin{cases} a_1=2 \\ d=1 \end{cases}$

$\therefore a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$ …………………… 3 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=T_n-T_{n-1}=1-b_n-1+b_{n-1}$,$\therefore \frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{2}$,…………………… 4 分

又 $T_1=1-b_1$　$\therefore b_1=\frac{1}{2}$. $\therefore \{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

$\therefore b_n=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*$ …………………… 5 分

(2)由(1)知 $a_n\cdot b_n=(n+1)\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*$,

$R_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+(n+1)\frac{1}{2^n}$　①

$\frac{1}{2}R_n=\quad 2\times\frac{1}{2^2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}+(n+1)\frac{1}{2^{n+1}}$　②

①－②得$\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$ …………………… 7 分

$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$ …………………… 9 分

$\therefore R_n=3-\frac{n+3}{2^n}$ …………………… 10 分

18. 解:(1)由 $a=c\cdot\cos B$ 得 $\cos B=\frac{a}{c}$,又 $\cos B=\frac{c-a}{2a}$,$\therefore \frac{c-a}{2a}=\frac{a}{c}$ …………………… 2 分

即 $2a^2-c^2+ac=0\Rightarrow(2a-c)(a+c)=0\Rightarrow c=2a$ …………………… 4 分

$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$

又 $B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ …………………… 6 分

(2)由 $a=c\cos B$ 及正弦定理,得 $\sin A=\sin C\cdot\cos B$,

即 $\sin(B+C)=\sin C\cdot\cos B$,即 $\sin B\cos C=0$,

$\therefore \cos C=0,C=\frac{\pi}{2}$

由已知,$c=3,AD=1$,$\therefore BD=2,BC=\frac{3}{2}$ …………………… 8 分

(或由 $\cos B=\frac{c}{a}$,得 $a=\frac{3}{2}$)

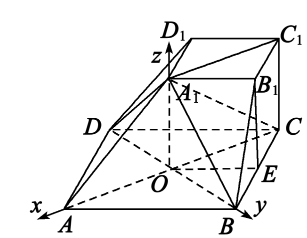
$\triangle BCD$ 中,由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos B=\frac{13}{4}$,

$\therefore CD=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$ …………………… 10 分

$\triangle BCD$ 中,由正弦定理得:$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin B}$,

$\therefore \sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin B}{CD}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$ …………………… 12 分

19. 解:(1)证明:如图,设 AC 与 BD 相交于点 O,连接 A_1O,OE



$\because O$、E 分别为 AC、BC 中点,

$\therefore OE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}AB$,又 $A_1B_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}AB$,

$\therefore OE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} A_1B_1$,$\therefore$四边形 A_1B_1EO 为平行四边形,…… 2 分

$\therefore B_1E /\!/ OA_1$ …………………… 3 分

又 $OA_1\subset$面 AA_1C,$B_1E\not\subset$面 AA_1C,$\therefore$直线 $B_1E /\!/$ 面 AA_1C …………………… 4 分

(2)因为 $A_1D=A_1B$，O 为 BD 中点，

所以 $A_1O\perp BD$，① …………………………………………………… 5 分

连接 A_1C_1，则 $A_1C_1\underline{\parallel}OC$，

∴四边形 A_1OCC_1 为平行四边形，

∴$C_1C=A_1O=1$，等边△ABD 中，$AO=\sqrt{3}$，

∴$A_1O^2+AO^2=4=AA_1^2$，从而 $A_1O\perp AC$，② …………………………… 6 分

因为 $A_1O\perp BD$，$AC\cap BD=O$，$AC,BD\subset$平面 $ABCD$，

所以 $A_1O\perp$平面 $ABCD$ …………………………………………… 7 分

以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$C_1(-\sqrt{3},0,1)$，$B_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1)$，$B(0,1,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$， ………………… 8 分

设平面 C_1B_1B 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{B_1B}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1B}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-z=0,\end{cases}$

则可取 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$， …………………………………………… 9 分

设平面 ABB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{B_1B}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}a+b=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1B}=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b-c=0,\end{cases}$ 则可取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$， ……………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-2}{2\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$， ……………………………… 11 分

由图可知，二面角 C_1-BB_1-A 为钝角，所以二面角 C_1-BB_1-A 的余弦值为$-\frac{\sqrt{7}}{7}$. … 12 分

20. 解：(1)由已知：$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，即$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=2b$ ………………… 1 分

由$\frac{c^2}{a^2}+\frac{(\frac{1}{2})^2}{b^2}=1$. 解得 $b=1$. …………………………………… 2 分

∴$a=2$，$b=1$

∴椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ …………………………………………… 4 分

(2)设 PQ：$x=my+4$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\begin{cases}x=my+4\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(m^2+4)y^2+8my+12=0$ ……………………………… 6 分

$\Delta=(8m)^2-4(m^2+4)\times12=16m^2-192>0$，即 $m^2>12$

$y_1+y_2=\frac{-8m}{m^2+4}$　$y_1y_2=\frac{12}{m^2+4}$ ………………………………………… 8 分

又 $B(-2,0)$

∴直线 BP 的方程：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=0$ 得：$y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$ ……………… 9 分

同理 $y_N=\frac{2y_2}{x_2+2}$ …………………………………………………… 10 分

$$\begin{aligned}\therefore|OM|\cdot|ON|=|y_M\cdot y_N|&=\frac{2y_1}{x_1+2}\cdot\frac{2y_2}{x_2+2}\\&=\frac{4y_1y_2}{(my_1+6)(my_2+6)}\\&=\frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+36}\\&=\frac{4\times\frac{12}{m^2+4}}{m^2\times\frac{12}{m^2+4}+6m\times(-\frac{8m}{m^2+4})+36}\\&=\frac{48}{12m^2-48m^2+36(m^2+4)}\\&=\frac{48}{144}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

∴$|OM|\cdot|ON|$为定值$\frac{1}{3}$ …………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设硬币正面向上的枚数为ξ，则$\xi \sim B(4,\frac{1}{2})$，

$P(\xi<3)=C_4^0(\frac{1}{2})^0\cdot(\frac{1}{2})^4+C_4^1(\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{2})^3+C_4^2(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^2=\frac{11}{16}$，

$P(\xi\geqslant 3)=C_4^3(\frac{1}{2})^3\cdot\frac{1}{2}+C_4^4(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{16}$； ………………………………… 2 分

①$P_3=P_2P(\xi<3)+(1-P_2)P(\xi\geqslant 3)$

$=\frac{11}{16}\times\frac{11}{16}\times+\frac{5}{16}\times\frac{5}{16}$

$=\frac{146}{256}=\frac{73}{128}$ ………………………………………… 4 分

②设A_{n-1}表示第$n-1$天选择骑自行车出行，A_n表示第n天选择骑自行车出行，

则$P_n=P(A_n)=P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1})+P(A_n|\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}})$

$=P_{n-1}\cdot P(\xi<3)+(1-P_{n-1})\cdot P(\xi\geqslant 3)$

$=P_{n-1}\times\frac{11}{16}+(1-P_{n-1})\times\frac{5}{16}$

$=\frac{3}{8}P_{n-1}+\frac{5}{16}$；

综上，$P_n=\frac{3}{8}P_{n-1}+\frac{5}{16}(n\geqslant 2)$. ………………………………… 6 分

(2)由(1)可知：$P_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$，又$P_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ………………… 8 分

$\therefore\{P_n-\frac{1}{2}\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{3}{8}$为公比的等比数列，

$\therefore P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{8})^{n-1}$，即$P_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{8})^{n-1}+\frac{1}{2}$ ……………………… 10 分

$\therefore P_n>\frac{1}{2}$，

∴王先生每天骑自行车的概率大于开车的概率，王先生的这种随机选择出行方式积极响应了市政府的号召. ……………………………………………… 12 分

22. 解：(1)$f'(x)=\frac{a}{2+ax}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{ax^2+4(a-2)}{(2+ax)(x+2)^2}$ ……………………… 2 分

当$a\geqslant 2$时，在区间$(0,+\infty)$上，$f'(x)>0$，此时$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增. …… 3 分

当$0<a<2$时，由$f'(x)=0$得$x_1=2\sqrt{\frac{2-a}{a}}$或$x_2=-2\sqrt{\frac{2-a}{a}}$(舍去)

当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$

故$f(x)$在区间$(0,x_1)$上单调递减，在区间$(x_1,+\infty)$上单调递增. ……………… 4 分

综上所述，当$a\geqslant 2$时，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

当$0<a<2$时，$f(x)$在区间$(0,2\sqrt{\frac{1-a}{a}})$上单调递减，在区间$(2\sqrt{\frac{1-a}{a}},+\infty)$上单调递增 ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)式知，当$a\geqslant 2$，$f'(x)\geqslant 0$，此时$f(x)$不存在极值点，因而要使得$f(x)$有两个极值点，必有$0<a<2$，又由$2+ax_2>0$，$x_2+2\neq 0$，可得$a\neq 1$.

令$f'(x)=0\Rightarrow\frac{ax^2+4(a-2)}{(2+ax)(x+2)^2}=0\Rightarrow ax^2+4(a-2)=0$　(*)

$\therefore x_1,x_2$是(*)的两个根

$\therefore x_1+x_2=0,x_1\cdot x_2=\frac{4(a-2)}{a}$ ……………………………………… 6 分

此时，由(1)式易知，x_1,x_2分别是$f(x)$的极小值点和极大值点，而

$f(x_1)+f(x_2)=\ln(2+ax_1)-\frac{2x}{x_1+2}+\ln(2+ax_2)-\frac{2x_2}{x_2+2}$

$=\ln[4+2a(x_1+x_2)+a^2x_1x_2]-\frac{4x_1x_2+4(x_1+x_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\ln(2a-2)^2-\frac{2(a-1)-2}{a-1}$

$=\ln(2a-2)^2+\frac{2}{a-1}-2$ ……………………………… 7 分

令$a-1=t$，由$0<a<2$且$a\neq 1$知

当$0<a<1$时，$-1<t<0$；当$1<a<2$时，$0<t<1$ ……………………… 8 分

记$g(t)=\ln 4t^2+\frac{2}{t}-2$

$g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}=\frac{2t-2}{t^2}<0$ ……………………………………… 9 分

(ⅰ)当$-1<t<0$时，$g(t)$在区间$(-1,0)$上单调递减，

从而$g(t)<g(-1)=\ln 4-4<0$，

故当$0<a<1$时，$f(x_1)+f(x_2)<0$，不合题意 ……………………… 10 分

(ⅱ)当$0<t<1$时，$g(t)$在区间$(0,1)$上单调递减，

从而$g(t)>g(1)=\ln 4>0$，符合题意.

故当$1<a<2$时，$f(x_1)+f(x_2)>0$

综上所述，满足条件的a的取值范围为$(1,2)$ ……………………………… 12 分