

绝密★启用前

河北省 2024 届高三年级大数据应用调研联合测评

数 学

班级 _____ 姓名 _____

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+2}{x-1}>0\right.\right\}$, $B=\{x|x\leq 1\}$, 则 $A\cap(\complement_U B)=$
A. $\{x|-2\leq x<1\}$ B. $\{x|-2<x\leq 1\}$ C. $\{x|x<-2\}$ D. $\{x|x>1\}$
2. 若复数 $z=1+i^{2023}$ (i 为虚数单位), 则复数 z^2-2 在复平面上对应的点所在的象限为
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知向量 $a=\left(\frac{5}{9}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $b=\left(-\frac{4}{9}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $c=(-1, \sqrt{3})$, 则向量 c 在向量 $a-b$ 上的投影向量为
A. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
4. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{3}$, 则 $\frac{S_{10}}{S_{20}}=$
A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{3}{14}$
5. 高斯是德国数学家、天文学家和物理学家, 被誉为历史上伟大的数学家之一, 和阿基米德、牛顿并列, 同享盛名。用他名字命名的高斯函数也称取整函数, 记作 $[x]$, 是指不超过实数 x 的最大整数, 例如 $[6.8]=6$, $[-4.1]=-5$, 该函数被广泛应用于数论、函数绘图和计算机领域。若函数 $f(x)=\log_2(-x^2+x+2)$, 则当 $x\in[0, 1]$ 时, $[f(x)]$ 的值域为
A. $\left[2, \frac{9}{4}\right]$ B. $\left\{2, \frac{9}{4}\right\}$ C. $\{1\}$ D. $\{2\}$
6. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, G 为线段 B_1D_1 上的动点, 则点 B 到平面 GAD 距离的最小值为
A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

高三数学 第 1 页(共 4 页)

1

7. 设实数 $a > 0$, 若不等式 $ae^{ax} - 1 \geq \ln \frac{x}{e}$ 对任意 $x > 0$ 恒成立, 则 a 的最小值为

- A. e B. $2e$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{1}{2e}$

8. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 若椭圆的

离心率为 e_1 , 双曲线的离心率为 e_2 , 则 $\frac{e_1^2}{e_1^2+1} + \frac{3e_2^2}{e_2^2+3}$ 的最小值是

- A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

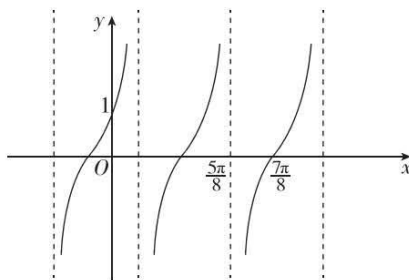
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列结论中正确的有

- A. 数据 11, 20, 14, 17, 26, 27, 9, 29, 15, 30, 4 的第 75 百分位数为 30
 B. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$, 若 $E(2X-1) = 7$, 则 $n = 6$
 C. 已知回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 9$, 若样本中心为 $(-3, 24)$, 则 $\hat{b} = -5$
 D. 若变量 x 和 y 之间的样本相关系数为 $r = 0.9989$, 则变量 x 和 y 之间的正相关性很小

10. 已知函数 $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的有

- A. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. $f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{3}$
 C. 方程 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in [0, \pi]$) 的解为 $\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$
 D. $f(2) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{3}{2}\right)$



11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 准线与 x 轴的交点为 M , 过点 M 且斜率为 k 的直线 l 与抛物线 C 交于两个不同的点 A, B , 则下列说法正确的有

- A. 当 $p = 2, k = \frac{1}{2}$ 时, $|FA| + |FB| = 16$
 B. $k \in (-1, 1)$
 C. 若直线 AF, BF 的倾斜角分别为 α, β , 则 $\alpha + \beta = \pi$
 D. 若点 A 关于 x 轴的对称点为点 A' , 则直线 $A'B$ 必恒过定点

12. 已知函数 $h(x) = \frac{1}{a}xe^x + x^2$, 若函数 $g(x) = \frac{2}{a}e^x + 2x - 1$ 的图象与 $h(x)$ 的图象有两个不同的交点, 则实数 a 的可能取值为

- A. -3 B. $\ln \frac{1}{2}$ C. $\ln 2$ D. 3

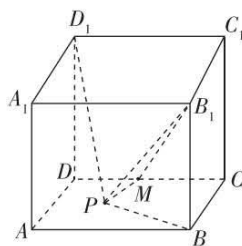
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(2\alpha - \pi) =$ _____.

14. 已知函数 $y = a^{x-2} + 3$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny = 2$ 上, 其中 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{3n}$ 的最小值为 _____.

15. 2023 年 9 月 23 日, 杭州第 19 届亚运会开幕, 在之后举行的射击比赛中, 6 名志愿者被安排到安检、引导运动员入场、赛场记录这三项工作, 若每项工作至少安排 1 人, 每人必须参加且只能参加一项工作, 则共有 _____ 种安排方案. (用数字作答)

16. 如图所示, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 M 在 DC 上, 且 $DM = \sqrt{2}$, 动点 P 在正方形 $ABCD$ 内运动 (含边界), 若 $|D_1P| = \sqrt{5}$, 则当 $|B_1P|$ 取得最小值时, 三棱锥 $B_1 - MPB$ 外接球的半径为 _____.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n$, 求数列 $\left\{\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.

18. (本小题满分 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 C 的平分线与边 AB 交于点 D , 且满足 $\frac{1 - \cos 2B}{\cos A} = \frac{\sin 2B}{1 + \sin A}$.

(1) 若 $AB = \sqrt{3}AC$, 求角 C ;

(2) 若 $CD = 2$, 求证: $\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$.

19. (本小题满分 12 分) 如图 1, 已知正三角形 ABC 边长为 4, 其中 $\vec{AD} = 3\vec{DB}, \vec{AE} = 3\vec{EC}$, 现沿着 DE 翻折, 将点 A 翻折到点 A' 处, 使得平面 $A'BC \perp$ 平面 DBC , M 为 $A'C$ 中点, 如图 2.

(1) 求异面直线 $A'D$ 与 EM 所成角的余弦值;

(2) 求平面 $A'BC$ 与平面 DEM 夹角的余弦值.

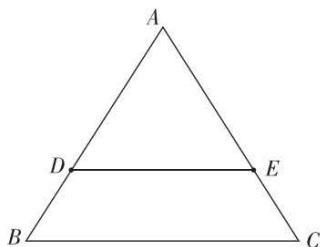


图1

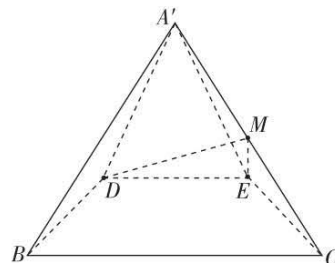


图2

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ma^x + x^2 - x \ln a + n (a > 1)$, m, n 为常数, 过曲线 $y = f(x)$ 上一点 $P(0, 1)$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 m, n 的值及 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若对任意的 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ (e 是自然对数的底数) 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 若以 F_1 为圆心, 1 为半径的圆与以 F_2 为圆心, 3 为半径的圆相交于 A, B 两点, 若椭圆 E 经过 A, B 两点, 且直线 AA_1, AA_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 点 P 是直线 $l: x = 4$ 上一动点, 过点 P 作椭圆 E 的两条切线, 切点分别为 M, N .

① 求证直线 MN 恒过定点, 并求出此定点;

② 求 $\triangle PMN$ 面积的最小值.

22. (本小题满分 12 分) 在信息论中, 熵 (entropy) 是接收的每条消息中包含的信息的平均量, 又被称为信息熵、信源熵、平均自信息量. 这里, “消息” 代表来自分布或数据流中的事件、样本或特征. (熵最好理解为不确定性的量度而不是确定性的量度, 因为越随机的信源的熵越大) 来自信源的另一个特征是样本的概率分布. 这里的想法是, 比较不可能发生的事情, 当它发生了, 会提供更多的信息. 由于一些其他的原因, 把信息 (熵) 定义为概率分布的对数的相反数是有道理的. 事件的概率分布和每个事件的信息量构成了一个随机变量, 这个随机变量的均值 (即期望) 就是这个分布产生的信息量的平均值 (即熵). 熵的单位通常为比特, 但也用 Sh、nat、Hart 计量, 取决于定义用到对数的底. 采用概率分布的对数作为信息的量度的原因是其可加性. 例如, 投掷一次硬币提供了 1 Sh 的信息, 而掷 m 次就为 m 位. 更一般地, 你需要用 $\log_2 n$ 位来表示一个可以取 n 个值的变量. 在 1948 年, 克劳德·艾尔伍德·香农将热力学的熵, 引入到信息论, 因此它又被称为香农熵. 而正是信息熵的发现, 使得 1871 年由英国物理学家詹姆斯·麦克斯韦为了说明违反热力学第二定律的可能性而设想的麦克斯韦妖理论被推翻. 设随机变量 ξ 所有取值为 $1, 2, \dots, n$, 定义 ξ 的信息熵 $H(\xi) = -\sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i$ ($\sum_{i=1}^n P_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$).

(1) 若 $n = 2$, 试探索 ξ 的信息熵关于 P_1 的解析式, 并求其最大值;

(2) 若 $P_1 = P_2 = \frac{1}{2^{n-1}}, P_{k+1} = 2P_k (k = 2, 3, \dots, n)$, 求此时的信息熵.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

