

重庆市高 2024 届高三第五次质量检测

数学试题

命审单位：重庆南开中学

注意事项：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知复数 $z = \sqrt{a} + i (a \in \mathbb{R})$ ，复数 z 的共轭复数为 \bar{z} 。若 $z \cdot \bar{z} = 3$ ，则 $a = (\quad)$

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 8

2. 函数 $f(x) = \sin x - \cos x (x \in \mathbb{R})$ 的图象的一条对称轴方程是 (\quad)

- A. $x = \frac{\pi}{4}$ B. $x = -\frac{\pi}{4}$
C. $x = \frac{\pi}{2}$ D. $x = -\frac{\pi}{2}$

3. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ ，则不等式 $f(2x-3) + f(x) \leq 0$ 的解集是 (\quad)

- A. $(-\infty, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $[3, +\infty)$

4. 已知 $(x^2 + x + a)(2x - 1)^6$ 展开式中各项系数之和为 3，则展开式中 x 的系数为 (\quad)

- A. -10 B. -11 C. -13 D. -15

5. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，且 $a, b, c \in A$ ，用 a, b, c 组成一个三位数，这个三位数满足“十位上的数字比其它两个数位上的数字都大”，则这样的三位数的个数为 (\quad)

- A. 14 B. 17 C. 20 D. 23

6. 已知正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的上、下底面的边长分别为 6 和 12，且棱台的侧面与底面所成的二面角为 60° ，则此三棱台的体积为 (\quad)

- A. $27\sqrt{3}$ B. $45\sqrt{3}$ C. $63\sqrt{3}$ D. $81\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1-kx-|x+2| & (x \leq 0) \\ e^x - kx & (x > 0) \end{cases}$ 恰有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $[1, e)$ B. $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (e, +\infty)$ C. $(-\frac{1}{2}, e)$ D. $(-\frac{1}{2}, 1)$

8. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $A(-\frac{3}{2}p, 0)$, 点 M 在抛物线上, 且满足 $|MA| = \sqrt{3}|MF|$,

若 $\triangle MAF$ 的面积为 $12\sqrt{3}$, 则 p 的值为 ()

- A. 3 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错得 0 分.

9. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = \frac{1}{2}$, 若数列 $\{a_n - S_n\}$ 既是等差数列, 又是等比数列, 则 ()

- A. $\{a_n\}$ 是等差数列 B. $\{\frac{\ln a_n}{n}\}$ 是等比数列

- C. $\{S_n\}$ 为递增数列 D. $\{n(n-1)a_n\}$ 最大项有两项

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 过直线 $l: y = x - 3$ 上一点 P 向圆 O 作两切线, 切点为 A, B , 则 ()

- A. 直线 AB 恒过定点 $(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ B. $|AP|$ 最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

- C. $|AB|$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$ D. 满足 $PA \perp PB$ 的点 P 有且只有一个

11. 某中学为了提高同学们学习数学的兴趣, 激发学习数学的热情, 在初一年级举办了以“智趣数学, “渝”你相约”为主题的数学文化节活动, 活动设置了各种精彩纷呈的数学小游戏, 其中有一个游戏就是数学知识问答比赛. 比赛满分 100 分, 分为初赛和附加赛, 初赛不低于 75 的才有资格进入附加赛 (有参赛资格且未获一等奖的同学都必须参加). 奖励规则设置如下: 初赛分数在 $[95, 100]$ 直接获一等奖, 初赛分数在 $[85, 95)$ 获二等奖, 但通过附加赛有 $\frac{1}{5}$ 的概率升为一等奖, 初赛分数在 $[75, 85)$ 获三等奖, 但通过附加赛有 $\frac{1}{3}$ 的概率升为二等奖 (最多只能升一级, 不降级), 已知 A 同学和 B 同学都参加了本次比赛, 且 A 同学在初赛获得了二等奖, 根据 B 同学的实力评估可知他在初赛获一、二、三等奖的概率分别为 $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 已知 A, B 获奖情况相互独立. 则下列说法正确的有 ()

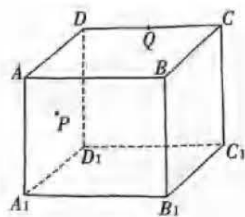
- A. B 同学最终获二等奖的概率为 $\frac{1}{3}$

- B. B 同学最终获一等奖的概率大于 A 同学获一等奖的概率

C. B 同学初赛获得二等奖且 B 最终获奖等级不低于 A 同学的概率为 $\frac{21}{100}$

D. 在 B 同学最终获奖等级不低于 A 同学的情况下, 其初赛获三等奖的概率为 $\frac{4}{15}$

12. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在侧面 AA_1D_1D 内运动 (包括边界), Q 为棱 DC 中点, 则下列说法正确的有 ()



A. 存在点 P 满足平面 $PBD \parallel$ 平面 B_1D_1C

B. 当 P 为线段 DA_1 中点时, 三棱锥 $P-A_1B_1D_1$ 的外接球体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

C. 若 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DA_1}$ ($0, \lambda, 1$), 则 $|PQ| - |PB|$ 最小值为 $\frac{3}{2}$

D. 若 $\angle QPD = \angle BPA$, 则点 P 的轨迹长为 $\frac{2}{9}\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 已知角 α 终边上有一点 $P(2, 1)$, 则 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$, $a_1 = \frac{750}{751}$, 若 $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, 则 $T_{2024} =$ _____.

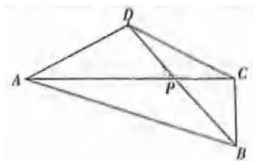
15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 过椭圆外一点 $P(3c, 0)$ 和上顶点

M 的直线交椭圆于另一点 N, 若 $MF_1 \parallel NF_2$, 则椭圆的离心率为 _____.

16. 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2, (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = -1$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 最大值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图, 在平面四边形 ABCD 中, $\triangle ACD$ 为钝角三角形, $AC \perp BC, P$ 为 AC 与 BD 的交点, 若 $\angle ACD = \frac{\pi}{6}, AD = 4, AC = 4\sqrt{3}$, 且 $\tan \angle BAD = \frac{7}{9}$



- (1) 求 $\angle ADC$ 的大小;
(2) 求 $\triangle PDC$ 的面积.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且满足_____.

- ① 首项 $a_1 = 1, \forall m, n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_{m+n} = S_n + 2mn$
② $\forall n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_n > 0$ 且 $(a_n - 1)^2 = 4S_n$

请从条件①和②中选一个填到题目条件下划线上(若两个都填, 以第一个为准), 并回答下面问题:

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求数列 $\{a_n \cdot 2^{a_n}\}$ 前 n 项和 T_n 的表达式

19. 新能源渗透率是指在一定时期内, 新能源汽车销量占汽车总销量的比重. 在 2022 年, 新能源汽车的渗透率达到了 28.2%, 提前三年超过了“十四五”预定的 20% 的目标. 2023 年, 随着技术进步, 新能源车的渗透率还在继续扩大. 将 2023 年 1 月视为第一个月, 得到 2023 年 1-10 月, 我国新能源汽车渗透率如下表:

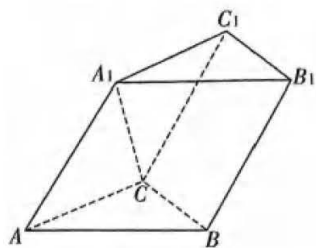
月份代码 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
渗透率 $y\%$	29	32	34	32	33	34	36	36	36	38

- (1) 假设自 2023 年 1 月起的第 x 个月的新能源渗透率为 $y\%$, 试求 y 关于 x 的回归直线方程, 并由此预测 2024 年 1 月的新能源渗透率.
(2) 为了鼓励大家购买新能源汽车, 国家在 2024 年继续执行新能源车购置税优惠政策: 在 2024 年 6 月 1 日前购买的新能源车无需支付购置税, 而燃油车需按照车价 10% 支付购置税. 2024 年 1 月小张为自己的客户代付购置税, 当月他的客户购买了 3 辆车价格均为 20 万元, 假设以 (1) 中预测的新能源渗透率作为当月客户购买新能源车的概率, 设小张总共需要代付的购置税为 X 万元, 求 X 的分布列和期望.

附: 一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的线性回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的系数公式为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

20. 如图, 斜三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面 $\triangle ABC$ 是边长为 a 的正三角形, 侧面 ABB_1A_1 为菱形, 且 $\angle A_1AB = 60^\circ$.



- (1) 求证: $AB \perp A_1C$;
- (2) 若 $\cos \angle A_1AC = \frac{1}{4}$, 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 24, 求直线 A_1C 与平面 CBB_1C_1 所成角的正弦值.

21. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = x$, 且点 $P(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ 在双曲线上.

- (1) 求双曲线的标准方程;
- (2) 设双曲线左右顶点分别为 A, B , 在直线 $x = 1$ 上取一点 $P(1, t) (t \neq 0)$, 直线 AP 交双曲线右支于点 C , 直线 BP 交双曲线左支于点 D , 直线 AD 和直线 BC 的交点为 Q , 求证: 点 Q 在定直线上.

22. 若函数 $f(x)$ 在定义域内存在两个不同的数 x_1, x_2 同时满足 $f(x_1) = f(x_2)$ 且 $f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 处的切线斜率相同, 则称 $f(x)$ 为“切合函数”.

- (1) 证明: $f(x) = 2x^3 - 6x$ 为“切合函数”;
- (2) 若 $g(x) = x \ln x - \frac{1}{e}x^2 + ax$ 为“切合函数” (其中 e 为自然对数的底数), 并设满足条件的两个数为 x_1, x_2 .

① 求证: $x_1 x_2 < \frac{e^2}{4}$;

② 求证: $(a+1)^2 x_1 x_2 - \sqrt{x_1 x_2} < \frac{3}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

