座位号＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学校＿＿＿＿

密 封 线 内 不 要 答 题

绝密★启用前

2023～2024学年度高二12月质量检测

数　　学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公差$d=-2$，则$a_5=$

A．-5　　B．-11　　C．-9　　D．-7

2．双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的渐近线方程为

A．$y=\pm 2x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　D．$y=\pm\sqrt{3}x$

3．若直线经过$A(1,0)$，$B(2,\sqrt{3})$两点，则直线AB的倾斜角为

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．135°

4．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=30$，则a_2+a_6的值为

A．20　　B．15　　C．10　　D．5

5．已知四面体$O-ABC$，G是$\triangle ABC$的重心，若$\overrightarrow{OG}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则$x+y-z=$

A．4　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

6．已知直线$l:y=k(x-1)$与圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$相交于A，B两点，若$\angle ACB<90^\circ$，则实数k的取值范围为

A．$\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$　　B．$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

C．$\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$　　D．$\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

7. 已知公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$满足$a_m+a_p=2a_5$，则$\frac{4}{m+2}+\frac{1}{p}$的最小值为

A. 1　　B. $\frac{5}{4}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. 2

8. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$，O为坐标原点，在抛物线C上存在两点A,B(异于原点)，直线OA,OB,AB的斜率分别为k_1,k_2,k_3，若$k_3=-2k_1$，则$\frac{k_2}{k_1}=$

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

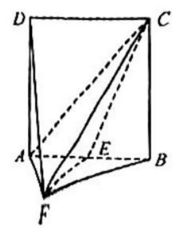
二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知数列$1,\sqrt{2}+1,\sqrt{3}+\sqrt{2},2+\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}+\sqrt{n-1},\cdots$，则下列说法正确的是

A. $3+2\sqrt{2}$是它的第 3 项　　B. $4+\sqrt{15}$是它的第 4 项

C. $3+2\sqrt{2}$是它的第 9 项　　D. $4+\sqrt{15}$是它的第 16 项

10. 如图所示，四边形$ABCD$为正方形，平面$ABCD\perp$平面ABF，E为AB的中点，$AF\perp BF$，且$AB=\sqrt{2}AF=2$，则下列结论正确的是



A. $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=2\sqrt{5}$

B. 直线BC到平面ADF的距离为$\sqrt{3}$

C. 异面直线AD与FC所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. 直线AC与平面BCF所成角的正弦值为$\frac{1}{2}$

11. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差为d，且$a_1<0$，若$a_{10}+a_{15}=a_{12}$，则下列命题正确的是

A. 数列$\{a_n\}$是递增数列

B. a_{13}是数列$\{a_n\}$中的最小项

C. S_{12}和S_{13}是$\{S_n\}$中的最小项

D. 满足$S_n<0$的n的最大值为 25

12. 已知焦点在x轴上，对称中心为坐标原点的等轴双曲线C的实轴长为$2\sqrt{2}$，过双曲线C的右焦点F且斜率不为零的直线l与双曲线交于A,B两点，点B关于x轴的对称点为D，则

A. 双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$

B. 若直线l的斜率为 2，则$|AB|=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

C. 若点B,A,F依次从左到右排列，则存在直线l使得A为线段BF的中点

D. 直线AD过定点$P(1,0)$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知数列$\{a_n\}(n\geq 1, n\in \mathbf{N})$的通项公式是$a_n=\sqrt{2n-1}$，则7是该数列中的第________项.

14. 若空间向量$\boldsymbol{a}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$，$\boldsymbol{c}=(1,0,m)$共面，则实数$m=$________.

15. 已知$a_1=1$，$a_2=2$，且$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$（n为正整数），则$a_{2020}=$________.

16. 已知点P是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上异于上下顶点的任意一点，$O$为坐标原点，过点$P$作圆$O:x^2+y^2=b^2$的切线，切点分别为$M,N$，若存在点$P$使得$\angle MPN=90°$，则椭圆离心率的最小值为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分10分）

已知点$P(-1,3)$，直线$l:x-2y-3=0$.

(1)求经过点P且与直线l平行的直线方程；

(2)求经过点P且与直线l垂直的直线方程.

18.（本小题满分12分）

记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_2+a_3=-4$，$S_3=-3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前20项和.

19.（本小题满分12分）

已知点$P(x_0,y_0)$是双曲线$C:\frac{x^2}{5}-y^2=1$上任意一点.

(1)求证：点P到双曲线C的两条渐近线的距离的乘积是一个常数；

(2)已知点$A(4,0)$，求$|PA|$的最小值.

20.（本小题满分 12 分）

设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_4=10$，$S_7=28$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

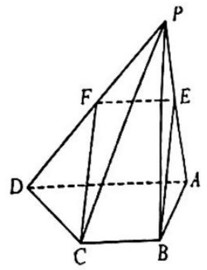
(2)求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 PAB，$AD\,/\!/\,BC$，$PA\perp AB$，E 为侧棱 PA 上一点，平面 BCE 与侧棱 PD 交于点 F，且 $AB=BC=AE=\frac{1}{2}AD=2$，DP 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$.

(1)求证：F 为线段 PD 的中点；

(2)求平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的正弦值.



（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，离心率为 $\frac{1}{2}$，点 $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 $T(2a,0)$ 作直线 l_1（直线 l_1 的斜率不为 0）与椭圆 C 相交于 M，N 两点，过焦点 F 作与直线 l_1 的倾斜角互补的直线 l_2，与椭圆 C 相交于 P，Q 两点，求 $\dfrac{|PF|\cdot|QF|}{|TM|\cdot|TN|}$ 的值.

2023～2024学年度高二12月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	C	A	B	C	D	B
题号	9	10	11	12				
答案	AC	ACD	ACD	ABD				

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】D

【解析】由题意可知不同选法有 $3\times5=15$(种)．故选D．

2.【答案】C

【解析】因为双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，所以渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$．故选C．

3.【答案】C

【解析】由直线经过$A(1,0)$，$B(2,\sqrt{3})$两点，可得直线的斜率为$\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，设直线的倾斜角为$\theta$，有$\tan\theta=\sqrt{3}$，又$0°\leqslant\theta<180°$，所以$\theta=60°$．故选C．

4.【答案】A

【解析】由题意可得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,x-2,0)$，因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=-3+2(x-2)=0$，解得$x=\frac{7}{2}$．故选A．

5.【答案】B

【解析】取BC的中点D，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，可得$x=y=z=\frac{1}{3}$，$x+y-z=\frac{1}{3}$．故选B．

6.【答案】C

【解析】过点C作$CH\perp AB$，垂足为H，由$\angle ACB<90°$，可得$\angle ACH<45°$，有$\angle HAC>45°$，有$\frac{|CH|}{|AC|}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得$|CH|>\frac{\sqrt{10}}{2}$，有$\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}>\frac{\sqrt{10}}{2}$，可得$-\frac{\sqrt{15}}{5}<k<\frac{\sqrt{15}}{5}$．故选C．

7.【答案】D

【解析】由题可设点P到椭圆两个焦点的距离分别为$2m$，m，所以$2m+m=2a$，得到$m=\frac{2}{3}a$，又$m\geqslant a-c$，所以$\frac{2}{3}a\geqslant a-c$，得到$c\geqslant\frac{1}{3}a$，故$\frac{1}{3}\leqslant e<1$．故选D．

8.【答案】B

【解析】设点A，B的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，有$k_1=\frac{y_1}{x_1}=\frac{2p}{y_1}$，$k_2=\frac{y_2}{x_2}=\frac{2p}{y_2}$，$k_3=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=$

$\frac{2p}{y_1+y_2}$，由 $k_3=-2k_1$，有 $\frac{2p}{y_1+y_2}=-2\times\frac{2p}{y_1}$，可得 $\frac{y_1}{y_2}=-\frac{2}{3}$，有 $\frac{k_2}{k_1}=\frac{\frac{2p}{y_2}}{\frac{2p}{y_1}}=\frac{y_1}{y_2}=-\frac{2}{3}$. 故选 B.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.**【答案】**AC

【解析】$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]=\frac{n\times(n-1)\cdots2\times1}{(n-m)\cdots2\times1}=\frac{n!}{(n-m)!}$，故 A 正确；

由上述可知 $A_{30}^{14}=\frac{30!}{16!}$，$A_{30}^{16}=\frac{30!}{14!}$，因此 $A_{30}^{14}\neq A_{30}^{16}$，故 B 错误；

$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{[(n+1)-(m+1)]!}=nA_{n-1}^{m-1}$，故 C 正确；

由上述可知 $A_{20}^{7}=20A_{19}^{6}$，故 D 错误. 故选 AC.

10.**【答案】**ACD

【解析】将圆 C_1：$x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 的方程化为标准方程得 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$，由此可知圆 C_1 的圆心坐标为 $(1,-2)$，半径为 2，故 A 选项正确；

将圆 C_2：$x^2+y^2-2y-8=0$ 的方程化为 $x^2+(y-1)^2=9$，因此 $|C_1C_2|=\sqrt{10}$，$1<|C_1C_2|<5$，因此两圆相交，故 B 选项错误；

根据圆的图象可知 $|MN|_{\max}=|C_1C_2|+2+3=5+\sqrt{10}$，故 C 选项正确；

不妨设 EF 中点为 P，则 $C_2P\perp EF$，圆 C_2 的半径为 3，由垂径定理可知 $|C_2P|=\sqrt{5}$，即 $|C_2P|^2=5$，设点 P 的坐标为 (x,y)，又点 C_2 的坐标为 $(0,1)$，所以 $x^2+(y-1)^2=5$，故 D 选项正确. 故选 ACD.

11.**【答案】**ACD

【解析】$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=2|\overrightarrow{CE}|=2\sqrt{1^2+2^2}=2\sqrt{5}$，故 A 正确；

易知 $BC/\!/AD$，$BC\not\subset$平面 ADF，$AD\subset$平面 ADF，所以 $BC/\!/$平面 ADF，由 $AF\perp BF$，$AD\perp BF$，可知 $BF\perp$平面 ADF，所以直线 BC 到平面 ADF 的距离为 $BF=\sqrt{2}$，即 B 错误；

异面直线 AD 与 FC 所成角即 BC 与 FC 所成角，因此余弦值为 $\frac{BC}{FC}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 正确；

易知 $AF\perp$平面 BCF，即 $\angle AFC=90°$，故 AC 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12.**【答案】**ABD

【解析】设双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$，由双曲线 C 的实轴长为 $2\sqrt{2}$，可得 $m=\sqrt{2}$，可知双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，故 A 选项正确；

由上知 $F(2,0)$，设直线 l 的方程为 $y=2(x-2)$，A，B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=2(x-2),\end{cases}$ 消去 y 后整理为 $3x^2-16x+18=0$，有 $x_1+x_2=\frac{16}{3}$，$x_1x_2=6$，可得 $|AB|=\sqrt{(1+2^2)\times\left[\left(\frac{16}{3}\right)^2-4\times6\right]}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$，故 B 选项正确；

由 $x_1>\sqrt{2}$，$x_2<-\sqrt{2}$，有 $\frac{x_2+2}{2}<1-\frac{\sqrt{2}}{2}<\sqrt{2}$，故不存在直线 l 使得 A 为线段 BF 的中点，故 C 选项错误；

设直线 l 的方程为 $my=x-2$，联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1,\\ my=x-2,\end{cases}$ 消去 x 后整理为 $(m^2-1)y^2+4my+2=0$，有 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{m^2-1}$，点 D 坐标为 $(x_2,-y_2)$，直线 AP 斜率为 $\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{y_1}{my_1+1}$，直线 DP 斜率为 $\dfrac{-y_2}{x_2-1}=\dfrac{-y_2}{my_2+1}$，若直线 AD 过定点 P，则 $\dfrac{y_1}{my_1+1}=\dfrac{-y_2}{my_2+1}$，即 $2my_1y_2+y_1+y_2=0$，经检验，上述等式恒成立，则直线 AD 过定点 $P(1,0)$，故 D 选项正确. 故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】$y^2=-4x$

【解析】由题意得该抛物线开口向左，且焦点坐标为 $(-1,0)$，故抛物线的方程为 $y^2=-4x$.

14.【答案】1

【解析】由题可知 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，故 $(1,0,m)=\lambda(1,1,1)+\mu(1,2,1)$，有 $\begin{cases}\lambda+\mu=1,\\ \lambda+2\mu=0,\\ \lambda+\mu=m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\ \mu=-1,\\ m=1.\end{cases}$

15.【答案】6

【解析】当 $A=0$ 时，可表示 2 条不同的直线；当 $B=0$ 时，可表示 2 条不同的直线；当 $C=0$ 时，可表示 2 条不同的直线，由分类加法计数原理，知共可表示 6 条不同的直线.

16.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】当 $\angle MPN=90°$ 时，由于 M,N 为切点，则 $OP=\sqrt{2}b$，又因为点 P 在椭圆上，因此 $b<\sqrt{2}b\leqslant a$，即 $2b^2\leqslant a^2$，解出 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1) $x-2y+7=0$　(2) $2x+y-1=0$

【解析】(1) 设经过点 P 且与直线 l 平行的直线方程为 $x-2y+m=0$，…… 2 分

将 $P(-1,3)$ 代入得 $-1-6+m=0$，$m=7$，…… 4 分

所以所求直线方程为 $x-2y+7=0$；…… 5 分

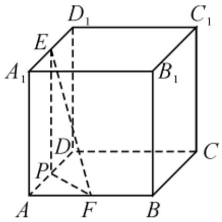
(2) 直线 l：$x-2y-3=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，…… 6 分

与直线 l 垂直的直线斜率为 -2，…… 8 分

所以经过点 P 且与直线 l 垂直的直线方程为 $y-3=-2(x+1)$，

即 $2x+y-1=0$. …… 10 分

18.【答案】(1) 略　(2) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$



【解析】(1) 证明：取 AD 中点 P，连接 PE，PF，

由于 P,F 为 AD,AB 中点，且四边形 ABCD 为正方形，因此 $AC\perp PF$，…… 1 分

由于 E,P 为 A_1D_1，AD 中点，且 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，因此 $EP\perp$ 平面 ABCD，

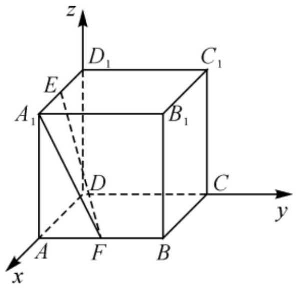
…… 2 分

又 $AC\subset$ 平面 ABCD，则 $EP\perp AC$，…… 3 分

因此 $AC\perp EP$，$AC\perp PF$，$EP\cap PF=P$，$EP,PF\subset$ 平面 PEF，则 $AC\perp$ 平面 PEF，…… 4 分

又 $EF\subset$ 平面 PEF，因此 $AC\perp EF$；…… 5 分

(2)以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为 x,y,z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0),C(0,2,0),A_1(2,0,2),E(1,0,2),F(2,1,0)$，

于是 $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1E}=(-1,0,0),\overrightarrow{A_1F}=(0,1,-2)$， ……………… 7 分

设平面 A_1EF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

有 $\begin{cases}-x=0,\\ y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$， ……………………………………… 9 分

因此 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， ……………………… 11 分

故直线 AC 与平面 A_1EF 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

19.【答案】(1)略　(2)$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

【解析】(1)证明：由已知可得 $a=\sqrt{5},b=1$，所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}x$， …………………… 1 分

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}x$，即直线 $x-\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_1=\dfrac{|x_0-\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$，……………………………… 2 分

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}x$，即直线 $x+\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_2=\dfrac{|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$，……………………………… 3 分

所以点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积为

$d_1d_2=\dfrac{|x_0-\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}=\dfrac{|x_0^2-5y_0^2|}{6}$， ……………………………………………………… 5 分

又 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线上，所以 $\dfrac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$，所以 $x_0^2-5y_0^2=5$，所以 $d_1d_2=\dfrac{5}{6}$ 是一个常数； ………… 6 分

(2)因为 $\dfrac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$，所以 $y_0^2=\dfrac{x_0^2}{5}-1\geqslant0$，解得 $x_0\leqslant-\sqrt{5}$ 或 $x_0\geqslant\sqrt{5}$， ……………………………… 8 分

所以 $|PA|^2=(x_0-4)^2+y_0^2=(x_0-4)^2+\dfrac{x_0^2}{5}-1=\dfrac{6}{5}x_0^2-8x_0+15=\dfrac{6}{5}\left(x_0-\dfrac{10}{3}\right)^2+\dfrac{5}{3}$，………… 10 分

当 $x_0=\dfrac{10}{3}$ 时，$|PA|^2$ 的最小值为 $\dfrac{5}{3}$，所以 $|PA|$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. ……………………………………… 12 分

20.【答案】(1)$x^2+y^2-2x-4y-4=0$　(2)$(0,2\sqrt{5})$

【解析】(1)设圆 M 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，将 A,B,C 三点坐标代入，

则 $\begin{cases}D+5E+F+26=0,\\ 4D+2E+F+20=0,\\ (\sqrt{5}+1)D+F+(\sqrt{5}+1)^2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\ E=-4,\\ F=-4,\end{cases}$ ………………………………………………………… 4 分

则圆 M 的方程为 $x^2+y^2-2x-4y-4=0$；………………………………………………………………… 6 分

(2)由题意可设直线 l 方程：$y=-\dfrac{1}{2}x+k,k<0$， ……………………………………………………… 7 分

圆心 $M(1,2)$ 到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}+2-k\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}}=\dfrac{5-2k}{\sqrt{5}}$， ………………………………………………… 8 分

由于 $k<0$，且直线 l 与圆交于两点，因此 $d>\sqrt{5},0<d<3$，即 $\sqrt{5}<d<3$，……………………………… 9 分

线段 $EF=2\sqrt{9-d^2}$，因此△EFM 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot 2\sqrt{9-d^2}=\sqrt{-\left(d^2-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}}$，………… 11 分

由于 $\sqrt{5}<d<3$，则 $d^2\in(5,9)$，因此 $S\in(0,2\sqrt{5})$，

所以△EFM 的取值范围为 $(0,2\sqrt{5})$. …………………………………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)略　(2)$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】(1)证明：因为 $AD\perp$ 平面 PAB，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AD\perp AB$，$AD\perp PA$，

又因为 $PA\perp AB$，且 $AD\cap AB=A$，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle PDA$ 为 DP 与平面 $ABCD$ 所成的角，……

…………………………………………………………………………………………………… 2 分

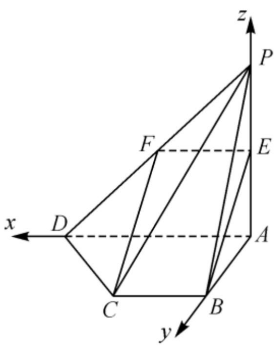
由 $\angle PDA=45°$，有 $PA=AD=4$，所以 E 为 PA 中点，…………………………………………… 4 分

因为 $AD/\!/BC$，$BC\not\subset$ 平面 ADP，$AD\subset$ 平面 ADP，所以 $BC/\!/$ 平面 ADP，

又因为 $BC\subset$ 平面 BCE，平面 $BCE\cap$ 平面 $ADP=EF$，所以 $BC/\!/EF$，所以 $EF/\!/AD$，

所以 F 为线段 PD 的中点；…………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 AD，AB，AP 两两垂直，如图所示，以 AD，AB，AP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.



则 $P(0,0,4)$，$D(4,0,0)$，$C(2,2,0)$，$B(0,2,0)$，……………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{PD}=(4,0,-4)$，$\overrightarrow{CD}=(2,-2,0)$，设平面 PDC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=(x,y,z)\cdot(4,0,-4)=4x-4z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=(x,y,z)\cdot(2,-2,0)=2x-2y=0,\end{cases}$

取 $x=1$，得到 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，……………………………………………………… 9 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$，由 $\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,-2,4)$，

有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BP}=-2b+4c=0,\end{cases}$ 取 $a=0$，$b=2$，$c=1$，可得 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$，……… 11 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以平面 PDC 与平面 PBC 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………………………………… 12 分

22.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　(2)$\frac{1}{4}$

【解析】(1)由 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，可得 $a=2c$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4c^2-c^2}=\sqrt{3}c$，………………………………… 2 分

可得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，代入点 A 的坐标有 $\frac{1}{12c^2}+\frac{11}{12c^2}=1$，解得 $c=1$，

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $a=2$，点 T 为 $(4,0)$，设点 P，Q，M，N 的坐标分别 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，(x_4,y_4)，直线 l_2 的方程为 $y=k(x-1)$，直线 l_1 的方程为 $y=-k(x-4)$，…………………………………………… 5 分

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 消去 y 后整理为 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

有 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$，………………………………………………………… 6 分

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=-k(x-4),\end{cases}$消去 y 后整理为$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$，

有 $x_3+x_4=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_3x_4=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}$，………………………………………………………… 7 分

又由右焦点 $F(1,0)$，有$\dfrac{|PF|\cdot|QF|}{|TM|\cdot|TN|}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}\,|x_1-1|\times\sqrt{1+k^2}\,|x_2-1|}{\sqrt{1+(-k)^2}\,|x_3-4|\times\sqrt{1+(-k)^2}\,|x_4-4|}=\dfrac{|x_1-1|\times|x_2-1|}{|x_3-4|\times|x_4-4|}$

$=\dfrac{|x_1x_2-(x_1+x_2)+1|}{|x_3x_4-4(x_3+x_4)+16|}$，………………………………………………………………… 9 分

对 x_1,x_2,x_3,x_4 消元，可得到原式$=\left|\dfrac{\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{8k^2}{4k^2+3}+1}{\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}-\dfrac{128k^2}{4k^2+3}+16}\right|=\left|\dfrac{4k^2-12-8k^2+4k^2+3}{64k^2-12-128k^2+16(4k^2+3)}\right|=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$，…

……………………………………………………………………………………………… 11 分

故$\dfrac{|PF|\cdot|QF|}{|TM|\cdot|TN|}$的值为$\dfrac{1}{4}$．…………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。