

长郡中学 2024 届高三期末适应性考

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	C	B	B	C	A	A	BD	ACD	ACD	ABD

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。）

1. A 【解析】因为 $z_1 = 12 - 3i$, $z_2 = -9 + i$, 所以 $z_1 + z_2 = 3 - 2i$, 其实部与虚部分别为 3, -2.

2. A 【解析】由 $1 - 2x > 0$, 解得 $x < \frac{1}{2}$, 所以 $M = \left\{x \mid x < \frac{1}{2}\right\}$,

而 $y = e^x > 0$, 所以 $N = \{y \mid y > 0\}$,

所以 $M \cap N = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

故选: A.

3. C 【解析】因为 $f(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

定义域关于原点对称,

$$f(-x) = \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \sin(-x) = -\left(\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right) \sin x = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \sin x = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 故排除选项 B、D,

当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = 0$ 可得 $x = 0$ 或 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以 $x > 0$ 时, 两个相邻的零点为 $x = 0$ 和 $x = \pi$,

当 $0 < x < \pi$ 时, $\frac{1-e^x}{1+e^x} < 0$, $\sin x > 0$, $f(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) \sin x < 0$, 故排除选项 A, 故选: C.

4. B 【解析】由 $\vec{b} = (1, 1)$, 得 $|\vec{b}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{10}$,

即 $4 + 2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$,

所以向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}\right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{b} = (1, 1)$. 故选: B.

5. B 【解析】因角 θ 的终边经过点 $(3, \sqrt{3})$, 由三角函数的定义可得 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又依题意得 $\beta = \theta - \frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan \beta = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan \theta \cdot \tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选: B.

6. C 【解析】由题意，在抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 中， $|AB| = 3|OF|$ ，

$$\text{焦点 } F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \text{ 准线 } l: x = -\frac{p}{2}$$

$$\therefore |OF| = \frac{p}{2}, |AB| = \frac{3}{2}p, \text{ 则 } A(p, \pm\sqrt{2}p)$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}p \cdot |\pm\sqrt{2}p| = 12\sqrt{2}, \text{ 解得: } p = 4$$

$$\therefore E \text{ 的方程为: } y^2 = 8x.$$

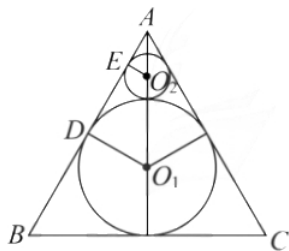
故选: C.

7. A 【解析】

$$\text{由边长为 } 2\sqrt{3} \text{ 的正三角形的内切圆半径为 } r_1 = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,$$

即轴截面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形的圆锥内切球半径为 1,

所以放入一个半径为 1 的小球 O_1 后, 再放一个球 O_2 , 如下图,



要使球 O_2 的表面积与容器表面积之比的最大, 即球 O_2 的半径 r_2 最大,

$$\text{所以只需球 } O_2 \text{ 与球 } O_1 \text{、圆锥都相切, 其轴截面如上图, 此时 } r_2 = \frac{1}{3} \times (2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2r_1) = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以球 } O_2 \text{ 的表面积为 } 4\pi r_2^2 = \frac{4\pi}{9}, \text{ 圆锥表面积为 } 3\pi + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}\pi = 9\pi,$$

$$\text{所以球 } O_2 \text{ 的表面积与容器表面积之比的最大值为 } \frac{4}{81}.$$

故选: A

8. A 【解析】

$$\text{由 } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}),$$

$$\text{若 } \sin x < \cos x, \text{ 则 } \sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0, \text{ 可得 } (2k+1)\pi < x - \frac{\pi}{4} < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z},$$

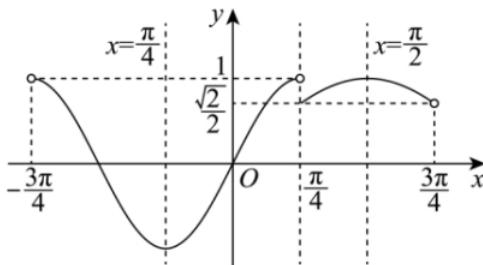
$$\text{所以 } 2k\pi + \frac{5\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{9\pi}{4}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{若 } \sin x \geq \cos x, \text{ 则 } \sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq 0, \text{ 可得 } 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z},$$



所以 $2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \\ \sin x, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$, 其函数图象如下图,



要使 $f(x) = a$ 有 4 个不同实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则 $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$,

由图知: $x_1 + x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 + x_4 = \pi$, 故 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} = \frac{\pi}{4}$, 且 $\frac{\sqrt{2}}{2} < f(x_1) < 1$,

所以 $f(x_1) \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$ 的范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故选: A

二、选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

9. BD 【解析】对选项 A, 取 $a = -1, b = 1$, 满足 $ab \neq 0$ 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 错误;

对选项 B, 因为函数 $y = x^3$ 单调递增, 当 $a < b$ 时, $a^3 < b^3$, 正确;

对选项 C, $a > b > 0$, 要使 $\frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a}$, 即 $ab + a < ab + b$, 即 $a < b$, 错误;

对选项 D, 因为函数 $y = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ 单调递增, 当 $a|a| < b|b|$, 则 $a < b$, 正确.

故选 BD.

10. ACD 【解析】在函数 $y = e^{kx+b}$ 中, 当 $x = 0$ 时, $e^b = 192$,

由 $2.8^5 \approx 172, 2.7^6 \approx 387$ 知, $b \in (5, 6)$, 故 A 正确;

当 $x = 14$ 时, $e^{14k+b} = 48$, 所以 $e^{14k} = \frac{48}{192} = \frac{1}{4}$, 则 $e^{7k} = \frac{1}{2}$,

当 $x = 21$ 时, $e^{21k+b} = (e^{7k})^3 \cdot e^b = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 192 = 24$, 故 B 不正确;

由 $e^{7k} = \frac{1}{2}$, 得 $k = \frac{1}{7} \ln \frac{1}{2} < 0$, 故 C 正确;

由 $y \geq 96$, 得 $96 \leq e^{kx} \cdot e^b = 192 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}$, 所以 $x \leq 7$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11. ACD 【解析】对于 A, 因为 $\varphi(4)=2$, $\varphi(6)=2$, $\varphi(8)=4$,

所以 $\varphi(4) \cdot \varphi(6) = \varphi(8)$, 故 A 正确;

对于 B, 由于 $\varphi(9)=6 \neq 8$, 故 B 错误;

对于 C, 因为小于 2^n 的所有正奇数与 2^n 均互质, 且小于 2^n 的所有正奇数有 2^{n-1} 个,

所以 $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$, 因此数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 为等比数列, 故 C 正确;

对于 D, 同理 $\varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}$, 所以 $\frac{\varphi(2^n)}{\varphi(3^n)} = \frac{2^{n-1}}{2 \times 3^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 令 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

则 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) < \frac{3}{2}$, 故 D 正确, 故选 ACD.

12. ABD 【解析】A 选项, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

$P(1, 2, 0), M(0, 1, 2), N(2, 0, 1), D(0, 0, 0), B_1(2, 2, 2)$,

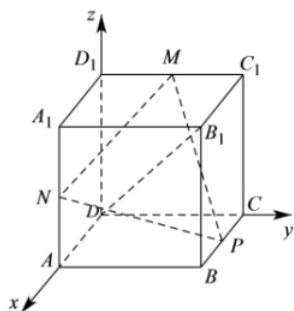
故 $\overrightarrow{DB_1} = (2, 2, 2), \overrightarrow{PM} = (-1, -1, 2), \overrightarrow{PN} = (1, -2, 1)$.

设平面 PMN 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PM} = (x, y, z) \cdot (-1, -1, 2) = -x - y + 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PN} = (x, y, z) \cdot (1, -2, 1) = x - 2y + z = 0 \end{cases},$$

令 $z = 1$ 得, $x = y = 1$, 故 $\vec{m} = (1, 1, 1)$,

因为 $\overrightarrow{DB_1} = 2\vec{m}$, 故 $DB_1 \perp$ 平面 PMN , A 正确;



B 选项, 取 A_1D_1, AB, CC_1 的中点 E, F, Q ,

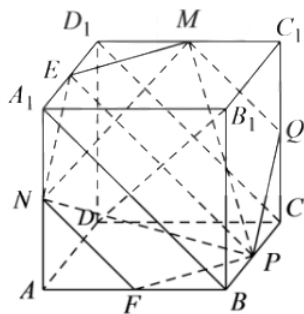
连接 $MQ, ME, EN, NF, FP, PQ, EP, A_1B, CD_1$,

因为 M, N, P 分别是棱 C_1D_1, AA_1, BC 的中点,

所以 $NF \parallel A_1B, MQ \parallel CD_1$, 又 $CD_1 \parallel EP \parallel A_1B$,

所以 $NF \parallel MQ \parallel EP$, 所以平面 PMN 截正方体所得的截面为正六边形 $FPQMEN$,

其中边长为 $\sqrt{2}$, 故面积为 $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{3}$, B 正确;



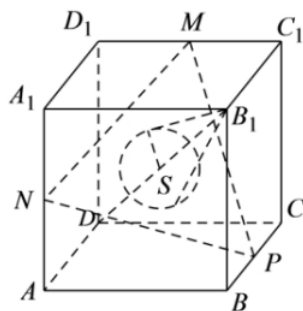
C 选项, Q 为平面 PMN 上的动点, 直线 QB_1 与直线 DB_1 的夹角为 30° ,

又 $DB_1 \perp$ 平面 PMN , 设垂足为 S , 以 S 为圆心, $r = \frac{\sqrt{3}}{3} B_1S$ 为半径作圆,

即为点 Q 的轨迹,

其中 $B_1D = |B_1D| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}$, 由对称性可知, $B_1S = \frac{1}{2} B_1D = \sqrt{3}$,

故半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1$,



故点 Q 的轨迹长度为 2π ，C 错误；

D 选项，因为 M, N, P 分别是棱 C_1D_1, AA_1, BC 的中点，

所以平面 PMN 分割该正方体所成的两个空间几何体对称，
不妨求能放入含有顶点 D 的空间几何体的球的半径最大值，

该球与平面 PMN 切于点 S ，与平面 ADD_1A_1 ，平面 $ADCB$ ，平面 DCC_1D_1 相切，

由对称性可知，球心在 B_1D 上，设球心为 $R(t, t, t)$ ，则半径为 t ，

$$S(1, 1, 1), \text{ 故 } |\overline{RS}| = t, \text{ 即 } \sqrt{3}(1-t) = t, \text{ 解得 } t = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

故球的半径的最大值为 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ，D 正确。

故选：ABD.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13. 120 【解析】由于 $x^5y^2 = (x^2)^2 \cdot x \cdot y^2$ ，

所以 $(2x^2 + x - y)^5$ 的展开式中含 x^5y^2 的项为

$$C_5^2 (2x^2)^2 \times C_3^1 x^1 \times C_2^2 (-y)^2 = 120x^5y^2,$$

所以 $(2x^2 + x - y)^5$ 的展开式中 x^5y^2 的系数为 120.

故答案为：120.

14. 97.7% 【解析】因为 100 个数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ 的平均值 $\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = 72$ ，

$$\text{方差 } s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{100} \left(\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - 100\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{100} \times [100 \times (72^2 + 36) - 100 \times 72^2] = 36,$$

所以 μ 的估计值为 $\mu = 72$ ， σ 的估计值为 $\sigma = 6$ 。

设该市高中生的身体素质指标值为 X ，

由 $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ，

得 $P(72 - 12 \leq X \leq 72 + 12) = P(60 \leq X \leq 84) \approx 0.9545$ ，



$$P(X > 84) = P(X > \mu + 2\sigma) = P(X < \mu - 2\sigma) = \frac{1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)}{2} = \frac{1 - 0.9545}{2}$$

$$\text{所以 } P(X \geq 60) = P(60 \leq X \leq 84) + P(X > 84) \approx 0.9545 + \frac{1}{2} \times (1 - 0.9545) = 0.97725 \approx 97.7\%.$$

故答案为: 97.7%.

15. $\frac{e^2}{2}$ 【解析】因为 $f(x) = e^{2x} - 2a(x-2)e^x - a^2x^2 (a > 0)$,

$$\text{所以 } f'(x) = 2e^{2x} - 2a[e^x + (x-2)e^x] - 2a^2x = 2(e^x - ax)(e^x + a)$$

$$\text{令 } y = e^x - ax, \text{ 则 } y' = e^x - a, \text{ 令 } y' > 0,$$

故当 $x > \ln a$ 时 $y' > 0$, 函数 $y = e^x - ax$ 为增函数,

当 $x < \ln a$ 时 $y' < 0$, 函数 $y = e^x - ax$ 为减函数,

即当 $x = \ln a$ 时函数 $y = e^x - ax$ 有最小值 $a(1 - \ln a)$,

若 $a(1 - \ln a) \geq 0$, 即 $0 < a \leq e$ 时 $f'(x) \geq 0$,

此时函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为增函数, 与题意不符;

若 $a(1 - \ln a) < 0$, 即 $a > e$ 时, 此时函数 $y = e^x - ax (a > 0)$ 与 x 轴有两个不同交点,

$$\text{设交点为 } (x_1, 0), (x_2, 0), \text{ 且 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 即 } \begin{cases} e^{x_1} = ax_1 \\ e^{x_2} = ax_2 \end{cases},$$

所以当 $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时 $y > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 为增函数,

当 $x_1 < x < x_2$ 时 $y < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 为减函数,

依题意, 函数 $f(x)$ 恰有两个零点即函数 $f(x)$ 与 x 轴有两个不同的交点,

$$\text{即 } f(x_1) = 0 \text{ 或 } f(x_2) = 0,$$

$$\text{所以 } e^{2x_1} - 2a(x_1 - 2)e^{x_1} - a^2x_1^2 = 0 \text{ 或 } e^{2x_2} - 2a(x_2 - 2)e^{x_2} - a^2x_2^2 = 0,$$

$$\text{化简得 } x_1 = 2 \text{ 或 } x_2 = 2, \text{ 所以 } a = \frac{e^{x_1}}{x_1} = \frac{e^2}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{e^2}{2}.$$

16. $\frac{3}{140}$ 【解析】在 $1, 2, \dots, 50$ 中随机选取三个数有: $C_{50}^3 = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19600$,

公差为 5 的等差数列有: $(1, 6, 11)$, $(2, 7, 12)$, $\dots$, $(40, 45, 50)$, 共 40 个;

公差为 6 的等差数列有: $(1, 7, 13)$, $(2, 8, 14)$, $\dots$, $(38, 44, 50)$, 共 38 个;

$\dots$,

公差为 24 的等差数列有: $(1, 25, 49)$, $(2, 26, 50)$, 共 2 个;

所以共有: $2 + 4 + 6 + \dots + 40 = \frac{20(2+40)}{2} = 420$,

所以能构成公差不小于 5 的等差数列的概率为: $\frac{420}{19600} = \frac{3}{140}$.

故答案为: $\frac{3}{140}$.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分.)

17. 【解析】(1) 由题设 $(n+1)^2(S_{n+1} - S_n) + (2n+1)S_n = 2$, 则 $(n+1)^2 S_{n+1} - n^2 S_n = 2$,

又 $1^2 \times S_1 = a_1 = 3$, 故 $\{n^2 S_n\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列,

所以 $n^2 S_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$, 则 $S_n = \frac{2n+1}{n^2}$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$,

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$.

18. 【解析】(1) $\because 4bS = a(b^2 + c^2 - a^2)$,

$\therefore 4b \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = a \cdot 2bc \cos A$, 即 $b \sin A = a \cos A$,

再由正弦定理边化角得 $\sin B \sin A = \sin A \cos A$,

$\because \sin A \neq 0$,

$\therefore \sin B = \cos A$, 又 A 为锐角,

$\therefore \sin B = \sin \left(\frac{\pi}{2} - A \right)$,

$\therefore B = \frac{\pi}{2} - A$ 或 $B + \frac{\pi}{2} - A = \pi$,

$\therefore B + A = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = A + \frac{\pi}{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形或钝角三角形;

(2) 由 (1) 的结果以及 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, 可得 $\angle BAC = \angle ABC = \frac{\pi}{4}$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 又 $BC = \sqrt{5}$,

$$\therefore AC = BC = \sqrt{5},$$

在 $\triangle AOC$ 中,

$$\text{则 } \cos \angle AOC = \frac{AO^2 + 1 - 5}{2AO} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 解得 } AO = \sqrt{2}, \text{ 负值舍去,}$$

$$\text{又 } \because \frac{AO}{\sin \angle ACO} = \frac{AC}{\sin \angle AOC},$$

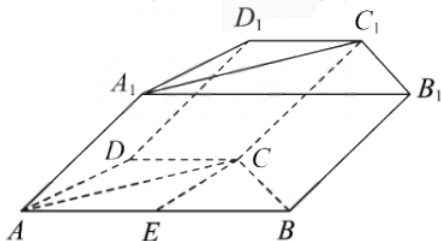
$$\therefore \sin \angle ACO = \frac{AO \sin \angle AOC}{AC} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \cos \angle BCO = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \angle ACO \right) = \sin \angle ACO = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{在 } \triangle BOC \text{ 中, } BO^2 = OC^2 + BC^2 - 2OC \cdot BC \cdot \cos \angle BCO = 1 + 5 - 2 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 4,$$

$$\therefore BO = 2.$$

19. 【解析】(1) 证明: 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = CD = AD = 1$,
作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于 E , 如图, 则 $ADCE$ 是菱形, $AE = CD = EB = CE = BC$,
 $\triangle BCE$ 是等边三角形, 则 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle DCE = \angle ECB = 60^\circ$, $\angle ACD = \angle ACE = 30^\circ$,
所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 即 $AC \perp BC$,
又 $BC \perp AA_1$, $AA_1 \cap AB = A$, $AA_1, AB \subset$ 平面 AA_1C_1C ,



所以 $BC \perp$ 平面 A_1ACC_1 , 又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以平面 $ABCD \perp$ 平面 A_1ACC_1 ;

(2) 点 A_1 在底面 $ABCD$ 的射影为 O , 由 (1), 得 O 在 AC 上, 且 $A_1O \perp AC$,

又 $A_1O = \frac{1}{2}$, $AA_1 = 1$, 所以 $AO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 而由 (1) 知 $AC = \sqrt{3}$, 因此 $CO = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

建立如图所示空间直角坐标系 $C-xyz$,

$$\text{则 } A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), O\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right), A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AA_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \text{ 所以 } D_1\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{设 } \overrightarrow{D_1M} = \lambda \overrightarrow{D_1B_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, 0\right) \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \quad M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda, \frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{CB} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{CM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda, \frac{1}{2} \right),$$

设平面 MBC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda \right)y + \frac{1}{2}z = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

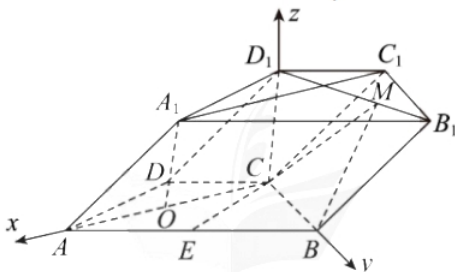
取 $x = 1$, 则 $\vec{n} = (1, 0, \sqrt{3}\lambda)$, 取平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{1+3\lambda^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow 4\lambda^2 = 1, \text{ 则 } \lambda = \frac{1}{2} \text{ (负值舍去)},$$

$$\text{即 } \overrightarrow{A_1M} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right), \quad \vec{n} = \left(1, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

设直线 A_1M 与平面 MBC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1M}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1M} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1M}| |\vec{n}|} = \frac{3}{7}\sqrt{3}$,

所以, 直线 A_1M 与平面 MBC 所成的角正弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{7}$.



20. 【解析】(1) 由题意可知 X 所有可能取值为 2, 3, 4,

$$P(X=2) = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}, P(X=3) = \frac{A_3^2 C_1^1}{3^3} = \frac{4}{9}, P(X=4) = \frac{A_3^3}{3^3} = \frac{2}{9},$$

所以 X 的分布列如下:

X	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

(2) 设甲一次性购买 x 个吉祥物盲盒, 集齐三款吉祥物需要的总费用为 Z .

依题意, x 可取 0, 1, 2, 3.

方案 1: 不购买盲盒时, 则需要直接购买三款吉祥物, 总费用 $Z_1 = 3 \times 30 = 90$ 元.

方案 2: 购买 1 个盲盒时, 则需要直接购买另外两款吉祥物,

总费用 $Z_2 = 19 + 2 \times 30 = 79$ 元.

方案 3: 购买 2 个盲盒时,

当 2 个盲盒打开后款式不同, 则只需直接购买剩下一款吉祥物,



$$\text{总费用 } Z_3 = 2 \times 19 + 30 = 68, P(Z_3 = 68) = \frac{A_3^2}{3^2} = \frac{2}{3},$$

当 2 个盲盒打开后款式相同, 则需要直接购买另外 2 款吉祥物,

$$\text{总费用 } Z_3 = 2 \times 19 + 2 \times 30 = 98, P(Z_3 = 98) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } E(Z_3) = 68 \times \frac{2}{3} + 98 \times \frac{1}{3} = 78 \text{ 元}.$$

方案 4: 购买 3 个盲盒时,

$$\text{当 3 个盲盒打开后款式各不相同, 则总费用 } Z_4 = 3 \times 19 = 57, P(Z_4) = A_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9},$$

当 3 个盲盒打开后恰有 2 款相同, 则需要直接购买剩下一款吉祥物,

$$\text{则总费用 } Z_4 = 3 \times 19 + 30 = 87, P(Z_4 = 87) = C_3^2 C_2^1 C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

当 3 个盲盒打开后款式全部相同, 则需要直接购买另外两款吉祥物,

$$\text{总费用 } Z_4 = 3 \times 19 + 60 = 117, P(Z_4 = 117) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9},$$

$$\text{所以 } E(Z_4) = 57 \times \frac{2}{9} + 87 \times \frac{2}{3} + 117 \times \frac{1}{9} = \frac{251}{3} \text{ 元}.$$

对比 4 个方案可知, 第 3 个方案总费用的期望值最小,

故应该一次性购买 2 个吉祥物盲盒.

21. 【解析】(1) 设 $P(x, y)$, 则 PF 的中点 $G\left(\frac{x-\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2}\right)$,

$$\text{根据题意得 } |OG| = 2 - \frac{1}{2}|PF|, \text{ 即 } \sqrt{\left(\frac{x-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + y^2},$$

$$\text{整理得 } \sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + y^2},$$

$$\text{化简得点 } P \text{ 的轨迹方程 } E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

(2) 设 $S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)$, 先证直线 ST 恒过定点, 理由如下:

由对称性可知直线 ST 的斜率不为 0, 所以可设直线 $ST: x = my + n$,

$$\text{联立直线 } ST \text{ 与 } E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = my + n \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 4)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta > 0 \Rightarrow 4 + m^2 - n^2 > 0, \text{ ①}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}, \quad (2)$$

$$\text{所以 } AS: x = \frac{x_1}{y_1 - 1}(y - 1), \text{ 令 } y = 0, \text{ 得点 } M \text{ 横坐标 } t = \frac{-x_1}{y_1 - 1},$$

$$\text{同理可得点 } N \text{ 横坐标 } 4 - t = \frac{-x_2}{y_2 - 1},$$

$$\text{故 } \frac{-x_1}{y_1 - 1} + \frac{-x_2}{y_2 - 1} = 4,$$

将 $x_1 = my_1 + n, x_2 = my_2 + n$ 代入上式整理得:

$$(2m + 4)y_1 y_2 + (n - m - 4)(y_1 + y_2) + 4 - 2n = 0,$$

$$\text{将 } (2) \text{ 代入得 } m^2 + 2mn + n^2 - 2m - 2n = 0 \Rightarrow (m + n)(m + n - 2) = 0,$$

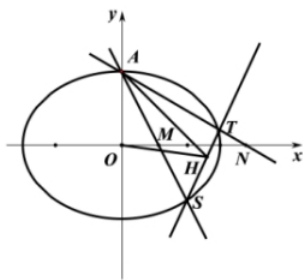
若 $m + n = 0$, 则直线 $ST: x = m(y - 1)$, 恒过 $A(0, 1)$ 不合题意;

若 $m + n - 2 = 0$, 则 $ST: x = m(y - 1) + 2$, 恒过 $Q(2, 1)$,

因为直线 ST 恒过 $Q(2, 1)$, 且与 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 始终有两个交点,

又 $A(0, 1)$, $AH \perp ST$, 垂足为 H ,

所以点 H 轨迹是以 AQ 为直径的半圆 (不含点 A, Q , 在直线 AQ 下方部分),



设 AQ 中点为 C , 则圆心 $C(1, 1)$, 半径为 1,

所以 $|OH| \geq |OC| - 1 = \sqrt{2} - 1$, 当且仅当点 H 在线段 OC 上时,

所以 $|OH|$ 的最小值为 $\sqrt{2} - 1$.

$$22. \text{【解析】} (1) \text{ 依题意, } x \in (0, +\infty), f'(x) = m + \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2} = \frac{mx^2 + x - m}{x^2},$$

若 $m=0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

若 $m \neq 0$, 则 $\Delta = 1 + 4m^2 > 0$, 令 $f'(x) = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m},$$

其中 $x_1 + x_2 = -\frac{1}{m}$, $x_1 x_2 = -1$ 若 $m > 0$, 则 $x_1 < 0 < x_2$,

故当 $x \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 时,

$f'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递增;

若 $m < 0$, 则 $x_2 < 0 < x_1$, 故当 $x \in \left(0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递减;

综上所述, 当 $m=0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $m > 0$ 时, 故 $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递增; 当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4m^2}}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递减;

(2) 依题意, $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} + ma + \ln b + mb - \frac{m}{b} + \frac{m}{b} < \ln a + ma - \frac{m}{a} + \frac{m}{a} + mb$,

$$\text{即 } \frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} < \ln \frac{a}{b}, \text{ 即 } \frac{k\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+1\right)} < \ln \frac{a}{b},$$

$$\text{即 } k \cdot \frac{\frac{a}{b} - 1}{\ln \frac{a}{b}} < \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } t = \sqrt{\frac{a}{b}}, (t > 1), \text{ 有 } k \cdot \frac{t^2 - 1}{2 \ln t} < t + \frac{1}{2}(t^2 + 1) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{得 } k \cdot \frac{t-1}{2 \ln t} < \frac{1}{2}(t+1) \text{ 恒成立, 所以 } k \cdot \frac{t-1}{t+1} - \ln t < 0 \text{ 恒成立}$$

$$\text{令 } g(t) = k \cdot \frac{t-1}{t+1} - \ln t,$$

$$\text{有 } g'(t) = k \cdot \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{2kt - (t+1)^2}{(t+1)^2 \cdot t} = \frac{-t^2 + 2(k-1)t - 1}{(t+1)^2 \cdot t}, \quad (\text{注: } g(1) = 0)$$

(i) 当 $g'(1) > 0$ 时, 即 $k > 2$ 时,

易知方程 $-t^2 + 2(k-1)t - 1 = 0$ 有一根 t_1 大于 1, 一根 t_2 小于 1,

所以 $g(t)$ 在 $[1, t_1)$ 上单调递增,

故有 $g(t_1) > g(1) = 0$, 不符;

(ii) 当 $0 < k \leq 2$ 时, 有 $2kt - (t+1)^2 \leq 4t - (t+1)^2 = -(t-1)^2 \leq 0$, 所以 $g'(t) \leq 0$,

当且仅当 $t = 1$ 时等号成立, 从而 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

故当 $t > 1$ 时, 恒有 $g(t) < g(1) = 0$, 符合.

由 i、ii 可知, 正实数 k 的取值范围为 $0 < k \leq 2$, 因此, k 的最大值为 2.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线