准考证号______ 姓名______ 学校______

高三数学试题

2024.1

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,第Ⅰ卷 1—3 页,第Ⅱ卷 3—4 页,共 150 分,测试时间 120 分钟.

注意事项:

选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在测试卷上.

第Ⅰ卷 选择题(共 60 分)

一、选择题(本题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合要求的.)

1. 设集合 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x\,|\,|x|<2\}$,$N=\{x\,|\,y=\lg(1-x)\}$,则 $(\complement_U M)\cap N=$

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-2]$

C. $(-\infty,1)\cup[2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知复数 $z=\dfrac{2i}{1+i}$,则 $|z-2i|=$

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

3. 按从小到大顺序排列的两组数据:甲组:30,31,37,m,42,60;乙组:28,n,33,44,48,70,若这两组数据的第 30 百分位数,第 50 百分位数都分别对应相等,则 $m+n=$

A. 60　　B. 65　　C. 70　　D. 71

4. 设点 P 是直线 $3x-4y+7=0$ 上的动点,过点 P 引圆 $C:(x-1)^2+y^2=3$ 的切线 PA,PB(切点为 A,B),则当 $\angle APB$ 取最大值时,$|PC|=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 米斗是古代官仓、米行等用来称量粮食的器具,鉴于其储物功能和吉祥富足的寓意,现今多在超市、粮店等广泛使用. 如图为一个正四棱台形米斗(忽略其厚度),其上、下底面边长分别为 $30\sqrt{2}$ cm,$20\sqrt{2}$ cm,侧棱长为 $2\sqrt{61}$ cm,若将该米斗盛满大米(沿着上底面刮平后不溢出),设每立方分米的大米重 0.8 千克,则该米斗盛装大米约

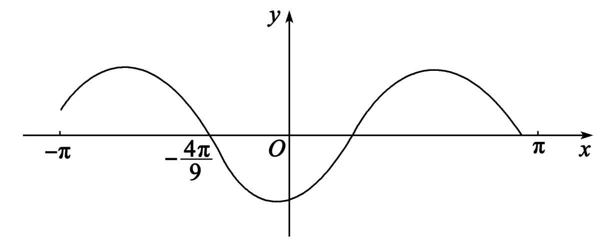
A. 6.08 千克　　B. 10.16 千克　　C. 12.16 千克　　D. 11.16 千克

6. 已知函数 $f(x)=2\sin x-2x$,若对任意 $m\in[-2,2]$,$f(ma-8)+f(a^2)>0$ 恒成立,则 a 的取值范围是

A. $(-2,2)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

7. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致如图,则 $f(x)$ 的最小正周期为



A. $\dfrac{10\pi}{9}$　　B. $\dfrac{32\pi}{27}$　　C. $\dfrac{4\pi}{3}$　　D. $\dfrac{25\pi}{18}$

8. 在三棱锥 P-ABC 中,$\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形,$\triangle PAC$ 是边长为 2 的正三角形,二面角 P-AC-B 的大小为 150°,则三棱锥 P-ABC 外接球的表面积为

A. $\dfrac{28\pi}{3}$　　B. $\dfrac{52\pi}{9}$　　C. $\dfrac{28\sqrt{21}\pi}{27}$　　D. $\dfrac{52\sqrt{13}\pi}{81}$

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

9. 下列四个表述中,正确的是

A. 设有一个回归直线方程 $\hat{y}=3-5x$,变量 x 增加 1 个单位时,y 平均增加 5 个单位

B. 在残差图中,残差点分布的水平带状区域越窄,说明模型的拟合精度越高

C. 在一个 2×2 列联表中,根据表中数据计算得到 K^2 的观测值 k,若 k 的值越大,则认为两个变量间有关的把握就越大

D. 具有相关关系的两个变量 x,y 的相关系数为 r,那么 $|r|$ 越接近于 0,则 x,y 之间的线性相关程度越高

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,下列结论正确的是

A. 点 A_1 到 DC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

B. 面 BC_1D 与面 AB_1D_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. 直线 A_1C_1 与平面 ABC_1D_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$

D. 点 A_1 到平面 BC_1D 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 双曲线具有以下光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点. 由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的左，右焦点，过 C 右支上一点 $A(x_0,y_0)(x_0>\sqrt{3})$ 作双曲线的切线交 x 轴于点 M，交 y 轴于点 N，则

A. 平面上点 $B(4,1)$，$|AF_2|+|AB|$ 的最小值为 $\sqrt{37}-2\sqrt{3}$

B. 直线 MN 的方程为 $xx_0-3yy_0=3$

C. 过点 F_1 作 $F_1H\perp AM$，垂足为 H，则 $|OH|=2$（O 为坐标原点）

D. 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 4

12. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+xf'(x)=e^x$，$f'(1)=1$. 数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，且 $f(a_{n+1})=\frac{f(a_n)-1}{a_{n+1}}$，则

A. $f(\ln 2)=\log_2 e$　　B. $f(x)\geqslant 1$　　C. $a_{2023}<a_{2024}$　　D. $0<a_n\leqslant 1$

第Ⅱ卷　非选择题（共 90 分）

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 在 $(1-\sqrt{2}x)^6$ 的二项展开式中任取一项，则该项系数为有理数的概率为________.

14. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$，若 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{BD}$，则 $\lambda-\mu=$________.

15. 若直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 且与抛物线交于 A、B 两点，AB 的中垂线交对称轴于点 D，则 $\frac{|AB|}{|DF|}=$________.

16. 已知函数 $f(x)=e^x+a\ln x-x^a-x(a>0)$，若 $f(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=3$，$S_5=20$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足关系式 $T_n=1-b_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 R_n.

18.（本小题满分 12 分）

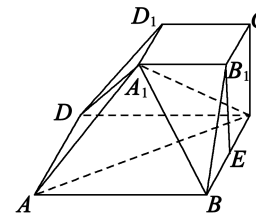
在 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，$a=c\cdot\cos B$ 且 $\cos B=\frac{c-a}{2a}$.

（1）求 B 的大小；

（2）若 $c=3$，D 为 AB 边上一点，且 $AD=1$，求 $\sin\angle BCD$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$A_1D=A_1B$，$A_1B_1=CC_1=1$，$AA_1=2$，点 E 分别为 BC 的中点.



（1）证明：直线 $B_1E\,/\!/$ 面 A_1AC；

（2）求二面角 $C_1\text{-}BB_1\text{-}A$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过焦点垂直于 x 轴的弦长为 1，左顶点为 B，定点 $C(4,0)$，过点 C 作与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，直线 BP、BQ 分别与 y 轴交于 M、N 两点.

（1）求椭圆方程；

（2）试探究 $|OM|\cdot|ON|$ 是否为定值，若为定值，求出该定值；若不为定值，说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

某市号召市民尽量减少开车出行，以绿色低碳的出行方式支持节能减排. 原来天天开车上班的王先生积极响应政府号召，准备每天在骑自行车和开车两种出行方式中随机选择一种方式出行. 从即日起出行方式选择规则如下：第一天选择骑自行车方式上班，随后每天用“一次性抛掷 4 枚均匀硬币”的方法确定出行方式，若得到的正面朝上的枚数小于 3，则该天出行方式与前一天相同，否则选择另一种出行方式.

（1）设 $P_n(n\in\mathbf{N}^*)$ 表示事件“第 n 天王先生上班选择的是骑自行车出行方式”的概率.

①求 P_3；②用 P_{n-1} 表示 $P_n(n\geqslant 2)$；

（2）依据 P_n 值，阐述说明王先生的这种随机选择出行方式是否积极响应市政府的号召.

22.（本小题满分 12 分）

已知常数 $a>0$，函数 $f(x)=\ln(2+ax)-\frac{2x}{x+2}$.

（1）讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $f(x_1)+f(x_2)>0$，求 a 的取值范围.