

姓名: _____ 准考证号: _____

秘密★启用前

三重教育 2023-2024 学年第一学期高三年级联考

数学试题

(考试时间 120 分钟, 满分 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 全部答案在答题卡上完成, 答在本试题上无效。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案用 0.5mm 的黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后, 将本试题和答题卡一并交回。

第 I 卷 选择题(共 60 分)

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | |x + 1| < 1\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{1\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{-1, -2\}$
2. 若复数 $z = (1 + 3i)(a - i)$ 为纯虚数, $a \in \mathbb{R}$, 则 z 的虚部为
 A. -10 B. -10i C. 10 D. 10i
3. 若 $f(x) = \frac{3e^x - ae^{-x}}{(3x + 1)(3x - 1)}$ 为奇函数, 则 $a =$
 A. -3 B. 3 C. 0 D. 1
4. 2023 年杭州亚运会已圆满落幕, 志愿者“小青荷”们让世界看到了新时代中国青年的风采。早在 2021 年 5 月, 杭州 A 公司便响应号召, 在全公司范围内组织亚运会志愿者的报名与培训, 经过选拔, 最终有 3 名党员和 3 名团员共 6 人脱颖而出。在彩排环节, 需从这 6 人中选派 2 人去游泳馆, 2 人去篮球馆, 且要求每个场馆均至少有一位党员, 则不同的选派结果有
 A. 54 种 B. 45 种 C. 36 种 D. 18 种
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 x 轴垂直, 且与 C 交于 A, B 两点, 若 \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{OB} 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ (O 为原点), 则双曲线 C 的离心率为
 A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$
6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + x^2 + x + 3$ 在 $[0, 2]$ 上不单调, 则 a 的取值范围是
 A. $(-\frac{5}{4}, 0)$ B. $(-\infty, -\frac{5}{4})$ C. $(-\frac{5}{4}, -1)$ D. $(-\frac{5}{4}, +\infty)$

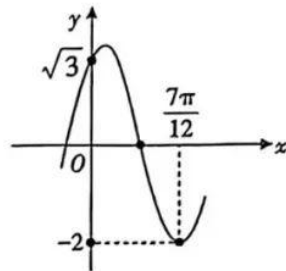
7. 某建材市场螺丝销售中心的供货商为A公司与B公司,已知两公司在该中心的供货占比为2:3,A公司所供螺丝的优品率为0.7,B公司所供螺丝的优品率为0.8,张明在该中心购得一枚螺丝,且为优品,那么该螺丝为A公司所供的概率为

- A. $\frac{12}{19}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{7}{19}$ D. $\frac{12}{19}$

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$) 的部分图象如图所示,图象与y轴的交点为 $(0, \sqrt{3})$,若 $g(x) = f(ax)$ ($a > 0$),且 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上

有两个极值点,则a的取值范围是

- A. $(1, \frac{13}{12}]$ B. $(0, \frac{7}{12})$
C. $(\frac{7}{12}, \frac{13}{12}]$ D. $[\frac{12}{13}, \frac{7}{13})$



二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

9. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$,则

- A. $y = f(x)$ 的值域为 \mathbb{R} B. $y = f(x)$ 有两个极值点
C. $y = f(x)$ 有两个零点 D. 方程 $f(x) = \frac{5}{3}$ 有三个根

10. 已知直线 $l: y = x + m$ 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点 F ,且与抛物线交于 A, B 两点,则

- A. $m = 1$
B. $|AB| = 8$
C. $|AF| = 2|BF|$
D. 抛物线 C 上的动点到直线 $y = x + 2$ 距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 $T_n, a_1 = 2, T_{n+1} - 2 = 3T_n (n \in \mathbb{N}^*)$,则

- A. $T_n = 3^n - 1$ B. $\{a_n\}$ 为递增数列
C. $a_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1} - 1}$ D. $\{T_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3^{n+1}}{2} - n - \frac{3}{2}$

12. 已知圆锥的顶点为 P ,底面圆心为 O, AB 为底面直径, $\triangle APB$ 为直角三角形, $AB = 2$,点 C 在底面圆周上(不与 A, B 重合),则

- A. 三棱锥 $P - ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}$
B. 当三棱锥 $P - ABC$ 的体积最大时,平面 PBC 与底面 ABC 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. 存在点 C ,使得平面 PBC 与底面 ABC 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D. 平面 PBC 与平面 PAC 夹角的余弦值的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}]$

第II卷 非选择题(共90分)

三、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分.)

13. 已知向量 e_1, e_2 满足 $|e_1| = |e_2| = |e_1 - e_2| = 1$, 则 $|e_1 + 2e_2| =$ _____.

14. 已知 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ ($\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$), 则 $\cos\theta =$ _____.

15. 直线 $ax + y + a - 2 = 0$ 被圆 $(x + 2)^2 + y^2 = 6$ 所截得的弦长的最小值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = (x^2 - 6x + m)(e^{x-3} + e^{3-x} - n)$ 的四个零点是以0为首项的等差数列, 则 $m + n =$ _____.

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = -\frac{2}{3}$, $3S_{n+1} = 2S_n - 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $b_n = \log_2(-a_n)$, $c_n = a_n + b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线, 且交 BC 于点 D , $AD = 1$.

(1) 若 $b + c = \frac{16}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(2) 若 $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{BD}$, 求 $\tan B$ 的值.

19. (本小题满分12分)

某连锁餐饮公司为了了解顾客的用餐体验, 要求各分公司对本地顾客进行了大量的电话访谈, 并邀请顾客对用餐体验评分, 分值设定范围为0~100分. 其中北京、太原分公司针对本地顾客的访谈结果及评分进行了统计分析, 得到如下评分的频率分布表:

北京分公司顾客用餐体验评分统计										
分值区间	(0,10]	(10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
频率	0.01	0.04	0.05	0.2	0.1	0.15	0.25	0.1	0.05	0.05
太原分公司顾客用餐体验评分统计										
分值区间	(0,10]	(10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
频率	0.01	0.01	0.02	0.06	0.1	0.2	0.2	0.25	0.1	0.05

请根据上述信息, 回答下列问题:

(1) 若两个分公司分别访谈了500位顾客, 设评分为70分以上的为评价满意, 否则记作评价不满意, 请填写下面的列联表, 并根据小概率值 $\alpha = 0.1$ 的 χ^2 独立性检验, 分析评价满意与否和分公司所在地是否有关联;

	评价满意	评价不满意	合计
北京			
太原			
合计			

(2) 现太原分公司邀请了2位评价满意和2位评价不满意的本地顾客,北京分公司从大量的本地受访顾客中随机邀请了3位,这7位顾客受邀参加总公司的试餐活动.活动后,总公司又从这两个分公司邀请的顾客中各随机邀请了2位顾客作为顾问.设这4位顾问中原评价为满意的人数为 ξ ,求 ξ 的分布列.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n = a + b + c + d$.

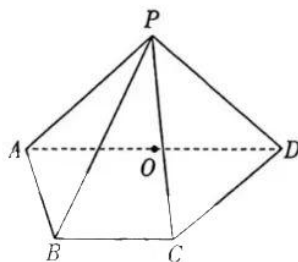
α	0.1	0.05	0.01	0.005
χ_α	2.706	3.841	6.635	7.879

20. (本小题满分12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA = PD$, $AD = 2AB = 2BC$, $AB \perp AD$, $AB \perp BC$,点 O 为 AD 的中点.

(1) 若点 E 为 CD 的中点,求证: $BO \perp PE$;

(2) 设四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,点 M 为底面四边形 $ABCD$ 内一点(包括四边形边上的点),且直线 PM 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,求直线 PM 与平面 PAC 所成角的正弦值的最小值.



21. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点,与 y 轴交于点 G .

(1) 已知过原点且与 l 平行的直线 l' 与椭圆 C 交于点 A, B ,求证: $\frac{|AB|^2}{|PQ|} = 2a$;

(2) 若椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\vec{GP} = \lambda \vec{PF}_1, \vec{GQ} = \mu \vec{QF}_1$,问 $\mu + \lambda$ 是否为定值?若是,求 $\mu + \lambda$ 的值;若不是,请说明理由.

22. (本小题满分12分)

已知 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^2 - (2a+1)x$,且 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x_1 + x_2 \in \left[\frac{e+1}{e-1}, 2 \ln 3 \right]$,求 $\frac{x_2}{x_1}$ 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

