参照秘密级管理★ 启用前试卷类型：A

2023－2024学年第一学期高三质量检测
高三数学

2024.01

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.
如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<2^x<2\right.\right\}$，$B=\{x\mid y=\lg(x+1)\}$，则 $A\cup(\complement_R B)=$

A. $\varnothing$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$

2. 若 z 是方程 $x^2+x+1=0$ 的一个虚数根，则 $z^2-\bar{z}=$

A. 0　　B. -1　　C. $\sqrt{3}i$　　D. -1 或 $\sqrt{3}i$

3. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A,B 的坐标分别是 $(-1,0),(1,0)$，且 AC,BC 所在直线的斜率之积等于 $m(m\neq0)$，则

A. 当 $m<0$ 时，顶点 C 的轨迹是焦点在 x 轴上的椭圆，并除去 $(-1,0),(1,0)$ 两点
B. 当 $m<0$ 时，顶点 C 的轨迹是焦点在 y 轴上的椭圆，并除去 $(-1,0),(1,0)$ 两点
C. 当 $m>0$ 时，顶点 C 的轨迹是焦点在 x 轴上的双曲线，并除去 $(-1,0),(1,0)$ 两点
D. 当 $m>0$ 时，顶点 C 的轨迹是焦点在 y 轴上的双曲线，并除去 $(-1,0),(1,0)$ 两点

4. 已知圆 $C_1:(x+1)^2+(y+1)^2=1$，圆 $C_2:x^2+y^2-4x-4y-1=0$，则两圆的公切线条数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知 $f(x)=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin2x$，$x\in(0,2\pi)$，则 $f(x)$ 的零点之和为

A. $\frac{4}{3}\pi$　　B. $\frac{10}{3}\pi$　　C. $\frac{14}{3}\pi$　　D. 10π

6. 翼云机场将于2025年通航，初期将开通向北至沈阳、哈尔滨；向南至昆明、深圳；向西至兰州、银川的六条航线. 甲、乙、丙、丁、戊、已6人各选择一条不同航线体验. 已知甲不去沈阳、哈尔滨，乙和丙乘坐同一方向的航班. 则不同的体验方案有

A. 56种　　B. 72种　　C. 96种　　D. 144种

7. 已知正四棱台的上下底面边长分别为1和3，高为2. 用一个平行于底面的截面截棱台，若截得的两部分几何体体积相等，则截面与上底面的距离为

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{\sqrt[3]{52}}{2}$　　C. $\sqrt[3]{4}$　　D. $\sqrt[3]{14}-1$

8. 斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 分别与 x 轴，y 轴交于 M,N 两点，且与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，在第一象限交于 A,B 两点，且 $|MA|=|NB|$，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 一组数据 $x_1,x_2,x_3,,x_{10}$ 满足 $x_i-x_{i-1}=2(2\leqslant i\leqslant 10)$，若去掉 x_1,x_{10} 后组成一组新数据. 则新数据与原数据相比

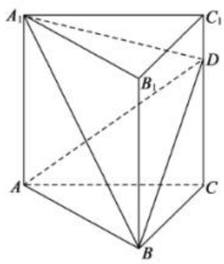
A. 极差变小　　B. 平均数变大　　C. 方差变小　　D. 第 25 百分位数变小

10. 设 $\vec{m}=(-1,3)$，$\vec{n}=(1,2)$，则

A. $|\vec{m}-2\vec{n}|=10$　　B. $(\vec{m}-2\vec{n})\perp\vec{m}$

C. 若 $(\vec{m}-2\vec{n})\,/\!/\,(k\vec{m}+\vec{n})$，则 $k=-\frac{1}{2}$　　D. $\vec{n}$ 在 $\vec{m}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{m}$

11. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AB=4$，D 是棱 CC_1 上任一点，则



A. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积为 $48+8\sqrt{3}$

B. 三棱锥 A_1-ABD 的体积为 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

C. $\triangle A_1BD$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}+4$

D. 三棱锥 A_1-ABD 外接球的表面积最小值为 $\frac{100\pi}{3}$

12. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(0)=\mathrm{e}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，函数 $y=f'\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 为奇函数，当 $x>\frac{1}{2}$ 时 $f'(x)>f(x)$，则

A. $f(1)=\mathrm{e}$　　B. $f(2)>\mathrm{e}^2$　　C. $\exists x_0\in\mathbf{R}, f(x_0)<1$　　D. $f(\mathrm{e}^{0.1})>f(-\ln 1.1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=\frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{x}$ 在点 $(1,y_0)$ 处的切线方程为 ______.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-10$，$\frac{S_3}{3}-\frac{S_2}{2}=1$，则 $S_{10}=$ ______.

15. 已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，点 C 为底面圆周上的一个动点，当 $\triangle PAC$ 的面积取得最大值时，$\sin\angle AOC=$ ______.

16. O 为坐标原点，F 为抛物线 $C:x^2=8y$ 的焦点，过 C 上的动点 M(不为原点)作 C 的切线 l，作 $ON\perp l$ 于点 N，直线 MF 与 ON 交于点 A，点 $B(\sqrt{5},0)$，则 $|AB|$ 的取值范围是 ______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$n^2a_{n+1}=(n+1)^2a_n$.

(1) 求 a_n；

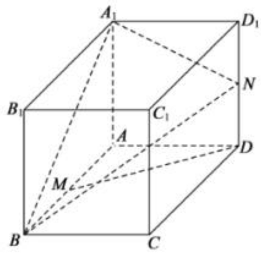
(2) 设 $b_n=\dfrac{n+1}{a_n\cdot a_{n+2}}$，求证：$b_1+b_2++b_n<\dfrac{5}{16}$.

18. (12 分)

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面为平行四边形，M，N 分别为 AB，DD_1 的中点.

(1) 证明：DM // 平面 A_1BN；

(2) 若底面 $ABCD$ 为矩形，$AB=2AD=4$，异面直线 DM 与 A_1N 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，求 B_1 到平面 A_1BN 的距离.



19. (12 分)

现有甲，乙两个训练场地可供某滑雪运动员选择使用. 已知该运动员选择甲，乙场地的规律是：第一次随机选择一个场地进行训练. 若前一次选择甲场地，那么下次选择甲场地的概率为 $\dfrac{3}{5}$；若前一次选择乙场地，那么下次选择甲场地的概率为 $\dfrac{1}{5}$.

(1) 设该运动员前两次训练选择甲场地次数为 X，求 $E(X)$；

(2) 若该运动员第二次训练选了甲场地，试分析该运动员第一次去哪个场地的可能性更大，并说明理由.

20. (12分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$2a+b\cos A-c=b\tan B\sin A$.

(1) 求B;

(2) 若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}$的取值范围.

21. (12分)

已知函数$f(x)=x^2-ax+a\ln x, a\in \boldsymbol{R}$.

(1) 若$f(x)$是增函数，求a的取值范围;

(2) 若$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，且$f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

22. (12分)

已知双曲线C的渐近线方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$，过右焦点$F(2,0)$且斜率为k的直线l与C相交于A,B两点.

(1) 求C的方程;

(2) ①若B点关于x轴的对称点为E，求证直线AE恒过定点M，并求出点M的坐标;

②若$k\geqslant 3$，求$\triangle AEF$面积的最大值.

2023~2024 学年第一学期高三质量检测数学
参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1－4　*BACD*　　5－8　*CCDA*

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9.*AC*　　10.*BCD*　　11.*ABD*　　12.*ABD*

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，

13.$ex-y=0$　　14.-10　　15.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　16.$[1,5]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 解法 1：由题意，得 $\forall n\in\mathbf{N}^*, a_n\neq 0$.

于是有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}$

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n^2}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}\cdot\frac{(n-2)^2}{(n-3)^2}\frac{3^2}{2^2}\times\frac{2^2}{1^2}\times 1=n^2$

又 $a_1=1^2$ 符合 $a_n=n^2$，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*, a_n=n^2$.

解法 2：由题意，得 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n}{n^2}$，故 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 为常数列.

$\frac{a_n}{n^2}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)^2}=\cdots=\frac{a_1}{1^2}=1$，故 $a_n=n^2$.

(2) $b_n=\frac{n+1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{n+1}{n^2\cdot(n+2)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$

故 $b_1+b_2++b_n=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)++\left(\frac{1}{(n-2)^2}-\frac{1}{n^2}\right)\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)\right]$

$=\frac{1}{4}\left[1+\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{5}{16}$

18. (1) 解法 1：证明：连接 AB_1，交 A_1B 于点 E，连接 NE,ME，则 E 为 A_1B 的中点，

因为 M 为 AB 的中点，所以 $ME\parallel AA_1$，且 $ME=\frac{1}{2}AA_1$，

因为 N 为 DD_1 的中点，所以 $DN\parallel AA_1, DN=\frac{1}{2}AA_1$，

所以 $ME\parallel DN$，且 $ME=DN$，所以四边形 $EMDN$ 为平行四边形，

所以 $EN\parallel DM$，

又因为 $DM\not\subset$ 平面 A_1BN，$EN\subset$ 平面 A_1BN，

所以 $DM\parallel$ 平面 A_1BN.

解法 2：取 AA_1 中点为 E，连接 ED,EM，

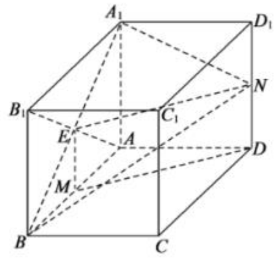
因为 E 为 AA_1 的中点，N 为 DD_1 的中点，所以 $A_1E\parallel DN$，且 $A_1E=DN$，

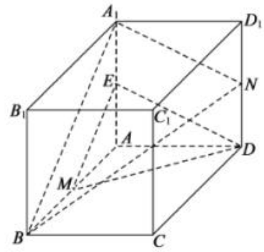
所以四边形 A_1EDN 为平行四边形，所以 $DE\parallel A_1N$.

又因为 $DE\not\subset$ 平面 A_1BN，$A_1N\subset$ 平面 A_1BN，所以 $DE\parallel$ 平面 A_1BN.

因为 M 为 AB 的中点，所以 $EM\parallel A_1B$，

又因为 $EM\not\subset$ 平面 A_1BN，$A_1B\subset$ 平面 A_1BN，





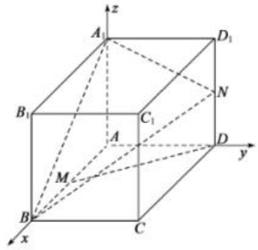
所以 EM // 平面 A_1BN.

又因为 $EM\subset$ 平面 DEM, $DE\subset$ 平面 DEM, $EM\cap DE=E$,

所以平面 DEM // 平面 A_1BN.

又因为 $DM\subset$ 平面 DEM,所以 DM // 平面 A_1BN.

(2) 解:由题意知, AB,AD,AA_1 两两垂直,以 A 为坐标原点,分别以 AB,AD,AA_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AA_1=2t(t>0)$,则 $B(4,0,0),D(0,2,0)$,

$A_1(0,0,2t),M(2,0,0),N(0,2,t)$,

$B_1(4,0,2t),\overrightarrow{DM}=(2,-2,0),\overrightarrow{A_1N}=(0,2,-t)$.

设异面直线 DM 与 A_1N 所成角为 θ,则

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DM},\overrightarrow{A_1N}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{A_1N}|}{|\overrightarrow{DM}|\cdot|\overrightarrow{A_1N}|}$$

$$=\frac{|-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-t)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4+t^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

解得 $t=1$,

故 $A_1(0,0,2),N(0,2,1),B_1(4,0,2)$,则 $\overrightarrow{A_1B}=(4,0,-2),\overrightarrow{A_1N}=(0,2,-1),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$

解法1:设平面 A_1BN 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

B_1 到平面 A_1BN 的距离为 d.

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{A_1N}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4x-2z=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$ 取 $z=2$,得 $\vec{n}=(1,1,2)$.

所以 $d=\dfrac{|\overrightarrow{B_1B}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|0\times1+0\times1+2\times2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

即 B_1 到平面 A_1BN 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

解法2:设 B_1 到平面 A_1BN 的距离为 d,则 $|A_1N|=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

$|BN|=\sqrt{4^2+2^2+1^2}=\sqrt{21}$, $|A_1B|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

所以 $\cos\angle A_1BN=\dfrac{A_1B^2+BN^2-A_1N^2}{2A_1B\cdot BN}=\dfrac{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{21})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times2\sqrt{5}\times\sqrt{21}}=\dfrac{9}{\sqrt{105}}$

所以 $\sin\angle A_1BN=\sqrt{1-\cos^2\angle A_1BN}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{105}}$.

所以 $S_{\triangle A_1BN}=\dfrac{1}{2}A_1B\cdot BN\cdot\sin\angle A_1BN=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{21}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{105}}=2\sqrt{6}$

又因为 $V_{B_1-A_1BN}=V_{N-A_1B_1B}$,即 $\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{6}\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times4\times2$

解得 $h=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$,

所以 B_1 到平面 A_1BN 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

19. 解:设 $A_i=$“第 i 次去甲场地训练”, $\overline{A_i}=$“第 i 次去乙场地训练”, $i=1,2$.

则 A_i 与 $\overline{A_i}$ 对立, $P(A_1)=P(\overline{A_1})=\dfrac{1}{2},P(A_2|A_1)=\dfrac{3}{5},P(A_2|\overline{A_1})=\dfrac{1}{5}$.

(1) 依题意, $X=0,1,2$.

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2}{5}$,

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$

$=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

$P(X=2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$.

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

(2) 第一次选择甲场地的概率更大.

$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

所以 $P(A_1|A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$,

$P(\overline{A_1}|A_2)=\dfrac{P(\overline{A_1}A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})}{P(A_2)}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$.

因为 $\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$,所以该运动员第一次选择甲场地的可能性更大.

20. (1) 因为 $2a+b\cos A-c=b\tan B\sin A$,整理得

$\dfrac{2a-c}{b}=\tan B\sin A-\cos A=\dfrac{\sin B\sin A-\cos A\cos B}{\cos B}=-\dfrac{\cos(A+B)}{\cos B}=\dfrac{\cos C}{\cos B}$

所以 $2a\cos B-c\cdot\cos B=b\cos C$,

由正弦定理得: $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$

因为 $0<A<\pi,0<B<\pi$,所以 $\sin A\neq 0,\cos B=\frac{1}{2}$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $B=\frac{\pi}{3}$,所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$,且 $0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$,

所以 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

解法 1: $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos C+1}{\sin C}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\dfrac{1}{2}$

因为 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\frac{C}{2}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\frac{C}{2}\in(2-\sqrt{3},1)$,

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}+\dfrac{1}{2}\in\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$

即 $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$.

解法 2: $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\cos C+1}{\sin C}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{(\cos C+1)^2}{1-\cos^2C}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{1-\cos C}-1}+\dfrac{1}{2}$

因为 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos C\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,得 $\dfrac{2}{1-\cos C}\in\left(2,\dfrac{4}{2-\sqrt{3}}\right)$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{1-\cos C}-1}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$

即 $\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3}\right)$.

21. 解：(1) 由题意 $f'(x)=2x-a+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+a}{x}(x>0)$.

因为函数 $f(x)$ 在其定义域上单调递增，

所以 $2x^2-ax+a\geqslant 0(x>0)$.

设 $g(x)=2x^2-ax+a(x>0)$,

①当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，只须 $g(0)=a\geqslant 0$，无解.

②当 $a\geqslant 0$ 时，只须 $g\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{8a-a^2}{8}\geqslant 0$，解得：$0\leqslant a\leqslant 8$,

综上所述：实数 a 的取值范围是 $[0,8]$.

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=2x-a+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-ax+a}{x}(x>0)$,

因为 $f(x)$ 有两个极值点为 x_1,x_2,

所以 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

此时方程 $2x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根.

则 $\Delta=a^2-8a>0$，且 $x_1+x_2=\frac{a}{2}>0,x_1\cdot x_2=\frac{a}{2}>0$,

解得 $a>8$.

若不等式 $f(x_1)+f(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，

则 $\lambda>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{x_1+x_2}$ 恒成立.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=x_1^2-ax_1+a\ln x_1+x_2^2-ax_2+a\ln x_2$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+(x_1^2+x_2^2)$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]$

$=a\ln\frac{a}{2}-\frac{1}{4}a^2-a$.

设 $h(a)=\frac{a\ln\frac{a}{2}-\frac{1}{4}a^2-a}{\frac{a}{2}}=2\ln\frac{a}{2}-\frac{1}{2}a-2(a>8)$.

则 $h'(a)=\frac{2}{a}-\frac{1}{2}=\frac{4-a}{2a}$，因为 $a>8$，所以 $h'(a)<0$,

所以 $h(a)$ 在 $(8,+\infty)$ 上递减，所以 $h(a)<h(8)=4\ln 2-6$,

所以 $\lambda\geqslant 4\ln 2-6$,

即实数 λ 的取值范围为 $[4\ln 2-6,+\infty)$.

22. 解：(1) 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,a>0,b>0$

由题意知 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\sqrt{3}\\a^2+b^2=4\end{cases}$,

解得 $a=1,b=\sqrt{3}$.

所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2) ①直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),(x_1\neq x_2)$，则 $E(x_2,-y_2)$.

由$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\y=k(x-2)\end{cases}$，消 y 得：$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$.

所以 $k_{AE}=\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}$

直线 AE 的方程为 $y+y_2=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}(x-x_2)$，

即 $y=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left[x-x_2-\dfrac{y_2(x_1-x_2)}{k(x_1+x_2)-4k}\right]$

$=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left[x-\dfrac{kx_2\cdot(x_1+x_2)-4kx_2+k(x_2-2)(x_1-x_2)}{k[(x_1+x_2)-4]}\right]$

$=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left[x-\dfrac{2x_1x_2-2(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)-4}\right]$

$=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left(x-\dfrac{2\times\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}-2\times\dfrac{4k^2}{k^2-3}}{\dfrac{4k^2}{k^2-3}-4}\right)$

$=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left(x-\dfrac{\dfrac{6}{k^2-3}}{\dfrac{12}{k^2-3}}\right)$

$=\dfrac{k[(x_1+x_2)-4]}{x_1-x_2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

所以直线 AE 恒过定点 $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

②$k\geqslant3$ 时，

$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AMF}-S_{\triangle EMF}=\dfrac{1}{2}MF\cdot|y_1+y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times k\times|x_1+x_2-4|$

$=\dfrac{3}{4}\times k\times\left|\dfrac{4k^2}{k^2-3}-4\right|$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{12k}{k^2-3}$

$=\dfrac{9k}{k^2-3}$

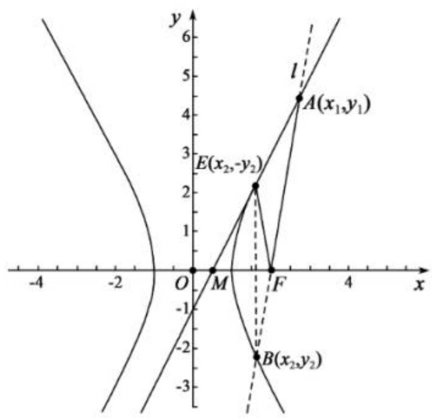
令 $f(x)=\dfrac{9x}{x^2-3}$，$x\geqslant3$

所以 $f'(x)=\dfrac{9(x^2-3)-9x\cdot2x}{(x^2-3)^2}=\dfrac{-9x^2-27}{(x^2-3)^2}<0$

所以 $f(x)=\dfrac{9x}{x^2-3}$，在 $[3,+\infty)$ 上单调递减

所以 $f(x)=\dfrac{9x}{x^2-3}\leqslant\dfrac{9\times3}{3^2-3}=\dfrac{9}{2}$，

所以 $S_{\triangle AEF}$ 的最大值为 $\dfrac{9}{2}$，此时 $k=3$.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。