江西高二期末教学质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　根据分类加法计数原理，不同的选法共有 $5+6+3=14$ 种. 故选 C.

2. B　由已知，得 $\overline{x}=3, \overline{y}=\frac{23+m}{3}$，又 $Y=2.25X+4.25$ 经过点 $\left(3, \frac{23+m}{3}\right)$，所以 $\frac{23+m}{3}=2.25\times3+4.25$，解得 $m=10$. 故选B.

3. B　若曲线 $\frac{x^2}{t-2}+\frac{y^2}{4-t}=1$ 表示椭圆，则 $\begin{cases} t-2>0, \\ 4-t>0, \\ t-2\neq 4-t, \end{cases}$ 解得 $2<t<4$ 且 $t\neq3$，所以实数 t 的取值范围是 $(2,3)\cup(3,4)$. 故选B.

4. A　因为事件 A 与事件 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{4}{5}$. 故选 A.

5. C　随机变量 $X\sim B(12,p)$，由 $EX\leqslant4$ 可得 $0<12p\leqslant4$，所以 $0<p\leqslant\frac{1}{3}$. 又 $DX=12p(1-p)=12(-p^2+p)$，因为函数 $f(p)=-p^2+p$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递增，所以 $f(p)_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$，所以 $(DX)_{\max}=12\times\frac{2}{9}=\frac{8}{3}$. 故选 C.

6. A　由题意分为两种情况：第一种情况：景海鹏站最右边，共有 $A_5^5=120$ 种排法；第二种情况：景海鹏不站最左边与最右边，则共有 $A_4^1A_4^1A_4^4=384$ 种排法，故总共有 $120+384=504$ 种排法. 故选 A.

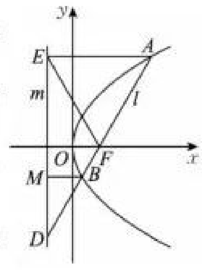
7. B　由双曲线 C 的方程知渐近线方程为 $3x\pm2y=0$，设 $P(x_0, y_0)$，由题意，得 $\frac{y_0^2}{9}-\frac{x_0^2}{4}=1$，即 $4y_0^2-9x_0^2=36$，点 P 到渐近线 $3x+2y=0$ 的距离 …… ，所以 $d_1d_2=\frac{|9x_0^2-4y_0^2|}{9+4}=\frac{36}{13}$. 故选 B.

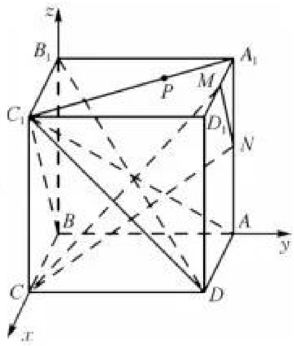
8. D　由直线 l_1, l_2 的方 …… $-m)=0$，所以 $l_1\perp l_2$，即 $AP\perp BP$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆 D 上，即 P 在圆 D：$(x+1)^2+(y-1)^2=2$ 上，又 P 在圆 C 上，所以圆 C 与圆 D 有交点，即 $|r-\sqrt{2}|\leqslant|CD|\leqslant r+\sqrt{2}$，又 $|CD|=\sqrt{(-1-2)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{2}\leqslant r\leqslant4\sqrt{2}$，即 r 的取值范围是 $[2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$. 故选 D.

9. AC　由组合数性质知 $3=17-n$，或 $3+17-n=n$，所以 $n=14$，或 $n=10$，都满足 $n\geqslant3$ 且 $n\geqslant17-n$. 故选 AC.

10. ABD　由分布列的性质知 $a=0.1$，$EX=0\times0.1+1\times0.4+2\times0.3+3\times0.2=1.6$，故 A 正确；$EY=E(3X+1)=3EX+1=5.8$，故 B 正确；$DX=0.1\times1.6^2+0.4\times0.6^2+0.3\times0.4^2+0.2\times1.4^2=0.84$，故 C 错误；所以 $DY=D(3X+1)=9DX=7.56$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABC　设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$，$AF$ 的中点为 $\left(\frac{x_1}{2}+\frac{p}{4}, \frac{y_1}{2}\right)$，由抛物线的定义，得 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}$，AF 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{x_1}{2}+\frac{p}{4}=\frac{1}{2}|AF|$，故以 AF 为直径的圆与 y 轴相切，A 正确；$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$，AB 的中点到准线的距离为 $\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}|AB|$，因此以 AB 为直径的圆与准线相切，故准线 m 上存在唯一一点 Q，使得 $QA\cdot QB=0$，B 正确；如图所示，过点 A, B 作准线 m 的垂线，垂足分别为点 E, M，由倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，可得 $\angle MDB=\frac{\pi}{6}$，设 $|BF|=s$，则 $|BM|=s$，因为 $\sin\angle MDB=\frac{|BM|}{|BD|}=\sin\frac{\pi}{6}$，所以 $|BD|=2s$，$\frac{BD}{BF}=2$，C 正确；设 $|AF|=t$，则 $|AE|=t$，因为 $\sin\angle MDB=\frac{|AE|}{|AD|}=\frac{t}{t+s+2s}=\sin\frac{\pi}{6}$，所以 $t=3s$，所以 $|AF|=3s$，所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=3$，D 错误. 故选 ABC.





12. ACD　以 B 为原点，BC，BA，BB_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(0,4,0)$，$C(2,0,0)$，$D(2,4,0)$，$A_1(0,4,4)$，$B_1(0,0,4)$，$C_1(2,0,4)$，$D_1(2,4,4)$，$M(1,4,4)$，$N(0,4,2)$，对于 A，因为 $NM=(1,0,2)$，$BC_1=(2,0,4)=2NM$，所以 $BC_1 // MN$，又 BC_1　平面 ABC_1，$MN\not\subset$平面 ABC_1，所以 $MN//$平面 ABC_1，故 A 正确；对于 B，$B_1D=(2,4,-4)$，$CM=(-1,4,4)$，$CN=(-2,4,2)$，设平面 CMN 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot CM=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot CN=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+4y+4z=0,\\ -2x+4y+2z=0.\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $x=-2$，$y=-\frac{3}{2}$，所以平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(-2,-\frac{3}{2},1\right)$，因为 B_1D 与 $\boldsymbol{m}=\left(-2,-\frac{3}{2},1\right)$ 不平行，所以 $B_1D\perp$平面 CMN 不成立，故 B 错误；对于 C，$CN=(-2,4,2)$，$AB=(0,-4,0)$，设异面直线 CN 和 AB 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle CN,AB\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 正确；对于 D，设 $A_1P=\lambda A_1C_1=(2\lambda,-4\lambda,0)$，其中 $\lambda\in[0,1]$，所以 $CP=CA_1+A_1P=(2\lambda-2,4-4\lambda,4)$，又平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=\left(-2,-\frac{3}{2},1\right)$，所以点 P 到平面 CMN 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot CP|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{2\lambda+2}{\frac{\sqrt{29}}{2}}$，不是定值，故 D 正确. 故选 ACD.

13. 24　$\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_4^r(-2)^r x^{4-2r}$，当 $4-2r=0$ 时，$r=2$，故 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为 $C_4^2(-2)^2=24$.

14. $\frac{4}{3}$　连接 BD，则 $BE=$ [illegible] $\frac{1}{3}(BA+BC)+\frac{2}{3}BP=\frac{1}{3}BA+\frac{1}{3}BC+\frac{2}{3}BP$. [illegible]

15. 0.7　设 A_i="第 i 天去 [illegible] A_i 与 B_i 互斥，根据题意得 $P(A_1)=P(B_1)=0.$ [illegible] $A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.5\times0.8+0.5\times0.$ [illegible]

16. 3　因为双曲线 Γ 的离心率为 $\sqrt{2}$，所以 $\frac{b}{a}=1$，不妨设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，因为点 A，B 在 Γ 上，所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1.\end{cases}$ 两式相减，得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}=\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}$，因为点 D 是 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，所以 $\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$，即 $\frac{y_0(y_1-y_2)}{x_0(x_1-x_2)}=\frac{b^2}{a^2}$，所以 $k_1k_1'=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{b^2}{a^2}=1$，同理 $k_2k_2'=1$，$k_3k_3'=1$，因为 $\frac{1}{k_1'}+\frac{1}{k_2'}+\frac{1}{k_3'}=3$，所以 $k_1+k_2+k_3=\frac{1}{k_1'}+\frac{1}{k_2'}+\frac{1}{k_3'}=3$.

17. 解：(1) 直线 l：$2x-y-4=0$ 的斜率为 2，

设直线 l_1 的斜率为 k，由 $l_1\perp l$，得 $2k=-1$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，…………………… 2 分

又直线 l_1 经过点 $P(2,-5)$，所以直线 l_1 的方程为 $y-(-5)=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y+8=0$. …………………… 4 分

(2) 方法一：$k_{PQ}=\frac{3+5}{-4-2}=-\frac{4}{3}$，所以 PQ 的中垂线的斜率为 $\frac{3}{4}$，又 PQ 的中点为 $(-1,-1)$，所以 PQ 的中垂线的方程为 $y+1=\frac{3}{4}(x+1)$，即 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$. …………………… 6 分

因为 P，Q 两点在圆 C 上，所以圆心 C 在 PQ 的中垂线上，又圆心 C 在直线 l 上，由 $\begin{cases}y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4},\\ 2x-y-4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$ 即圆心 C 的坐标为 $(3,2)$，…………………… 8 分

又圆 C 的半径 $r=|CP|=\sqrt{(3-2)^2+(2+5)^2}=5\sqrt{2}$，

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=50$. …………………………………………………………………… 10 分

方法二：因为圆 C 的圆心在直线 l 上，所以可设圆心 C 的坐标为 $(a,2a-4)$，半径为 r，所以圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-2a+4)^2=r^2$， …………………………………………………………………………………………… 6 分

又 P、Q 两点在圆 C 上，所以 $\begin{cases}(2-a)^2+(-5-2a+4)^2=r^2,\\(-4-a)^2+(3-2a+4)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\r=5\sqrt{2}.\end{cases}$ ……………………………………… 9 分

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=50$. …………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)第一步：千位不能为 0，有 6 种选择；第二步：百位可以从剩余数字中选，有 6 种选择；第三步：十位可以从剩余数字中选，有 5 种选择；第四步：个位可以从剩余数字中选，有 4 种选择.

根据分步计数原理，能组成 $6\times6\times5\times4=720$ 个没有重复数字的四位数. ……………………………………… 5 分

(2)第一类：当个位数字是 0 时，没有重复数字的四位数有 $6\times5\times4=120$ 个；

第二类：当个位数字是 2 时，千位不能为 0，没有重复数字的四位数有 $5\times5\times4=100$ 个；

第三类：当个位数字是 4 时，千位不能为 0，没有重复数字的四位数有 $5\times5\times4=100$ 个；

第四类：当个位数字是 6 时，千位不能为 0，没有重复数字的四位数有 $5\times5\times4=100$ 个.

根据分类计数原理，能组成 $120+100+100+100=420$ 个没有重复数字的四位偶数. ……………………………… 12 分

19. 解：(1)设学生的物理得分为随机变量 X，则 $X\sim N(60,100)$，所以 $\mu=60$，$\sigma=10$. ……………………………… 2 分

所以 $P(40\quad X\leqslant80)=P(\mu-2\sigma\quad X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$， …………………………………………………… 4 分

$P(X\quad 80)=\dfrac{1-P(40\quad X\leqslant80)}{2}=0.0228$，

所以物理成绩优秀的[illegible] …………………………… 6 分

(2)由题意，得 $P(\mu-$[illegible]

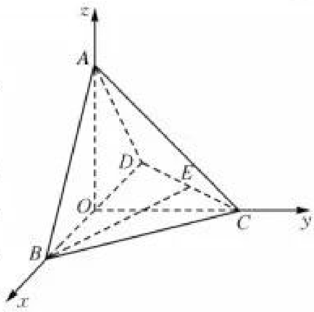
即 $P(50\quad X\leqslant70)=$[illegible] …………………………………… 7 分

所以 $P(50\quad X\leqslant60$[illegible] $=0.4772$， ………… 8 分

所以 $P(50\quad X\leqslant80$[illegible] ……………………… 10 分

又 40000×0.8185[illegible]

所以全市物理成绩在 $(50,80]$ 内的学生人数估计为 32 740 人. …………………………………………………… 12 分



20. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle BAD$ 与 $\triangle BCD$ 均为正三角形，

取 BD 的中点 O，连结 OA、OC，则 $OA\perp BD$. …………………………………………… 2 分

因为 $AB=2$，所以 $OA=OC=\sqrt{3}$.

因为 $OA^2+OC^2=6=AC^2$，所以 $OA\perp OC$. …………………………………………… 4 分

又 $BD\quad OC=O$，BD、$OC\quad$ 平面 BCD，所以 $OA\perp$ 平面 BCD. …………………… 5 分

因为 $OA\quad$ 平面 ABD，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCD. ………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，OA、OB、OC 两两垂直，以 O 为坐标原点，OB、OC、OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$.

因为 E 是 CD 的中点，所以 $E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，所以$BA=(-1,0,\sqrt{3})$，$BC=(-1,\sqrt{3},0)$，$BE=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. …… 7 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 ABC 的一个法向量，则 $\begin{cases}BA\cdot\boldsymbol{m}=-x+\sqrt{3}z=0,\\BC\cdot\boldsymbol{m}=-x+\sqrt{3}y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，得 $x=\sqrt{3}$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$. ……………………………………………………………… 9 分

$\cos\langle BE,\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{BE\cdot\boldsymbol{m}}{|BE|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………………………… 11 分

设直线 BE 与平面 ABC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle \overrightarrow{BE},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以直线 BE 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

…………………………………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意得 $\chi^2=\frac{200\times(60\times70-40\times30)^2}{100\times100\times90\times110}$　18.182.

由于 18.182　10.828，所以有 99.9% 的把握认为直播带货的评级与主播的学历层次有关联. …………………… 4 分

(2)$R(B\ A)=\frac{P(B\ A)}{P(B\ A)}=\frac{\frac{P(AB)}{P(A)}}{\frac{P(AB)}{P(A)}}=\frac{P(AB)}{P(AB)}=\frac{n(AB)}{n(AB)}=\frac{70}{40}=\frac{7}{4}=1.75$，

因为 1.75　1.35，所以认为事件 A 条件下 B 发生有优势. ……………………………………………… 7 分

(3)按照分层抽样，直播带货优秀的有 3 人，直播带货良好的有 2 人，随机变量 X 的可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，…………………………………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

所以数学期望 $EX=1\times$ ……………………………………………… 12 分

22. (1)解：抛物线 C 的准线 .

由题意及抛物线的定义 ……………………………… 3 分

又 m　p，所以 $p=2$，所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. ……………………………………………… 4 分

(2)①证明：由题意知 $F(0,1)$，直线 l_1，l_2 的斜率均存在且不为 0，

不妨设直线 l_1 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，

所以 $\Delta=16k^2+16$　0，$x_1+x_2=4k$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$，

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=y_1+\frac{p}{2}+y_2+\frac{p}{2}=4k^2+4=4(k^2+1)$. ……………………………………… 6 分

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，所以 $l_1\perp l_2$，所以将 k 换成 $-\frac{1}{k}$，得 $|MN|=4\left(\frac{1}{k^2}+1\right)=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$. ………………………… 7 分

所以 $\frac{|MN|+|AB|}{|AB|\ |MN|}=\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|MN|}=\frac{1}{4(k^2+1)}+\frac{k^2}{4(k^2+1)}=\frac{1}{4}$，

即 $\frac{|AB|\ |MN|}{|AB|+|MN|}$ 为定值 4. ……………………………………………………………………… 9 分

②解：四边形 $AMBN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\,|MN|=\frac{1}{2}\times4(k^2+1)\times\frac{4(k^2+1)}{k^2}=8\left(k^2+\frac{1}{k^2}+2\right)\geqslant8\times\left(2\sqrt{k^2\times\frac{1}{k^2}}+2\right)=32$，

当且仅当 $k^2=\frac{1}{k^2}$，即 $k=\pm1$ 时等号成立， …………………………………………………… 11 分

所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值是 32. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。