

“德化一中、永安一中、漳平一中”三校协作

2023—2024 学年第一学期联考

高三数学试题

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

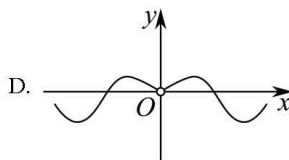
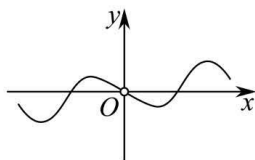
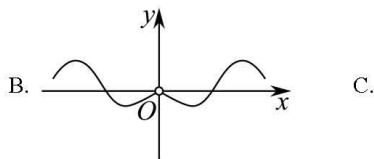
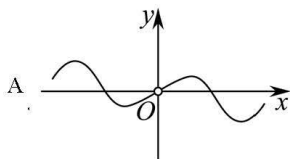
1. 若集合 $A = \{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | \ln x \leq 0\}$, 则 $A \cap B$ 的元素的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 复数 $z = \frac{i}{1-i^5}$ 的虚部为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}i$

3. 函数 $y = \sin x \cdot \ln \frac{x^2+2}{x^2}$ 的图象可能是 ().



4. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 2\sqrt{2}, c = 4, C = 45^\circ$, 则 A 的值可以为 ()

- A. 30° B. 60° C. 120° D. 30° 或 150°

5. 若向量 $\vec{a} = (0, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, 0, \lambda)$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp 2\vec{b}$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量是 ()

- A. $2\vec{b}$ B. $\vec{b}$ C. $-\vec{b}$ D. $-2\vec{b}$

6. 设 $a = \frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}$, $b = \frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $a < b$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ C. $a^2 + b^2 \geq 2$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = 2$

7. 我国古代的洛书中记载着世界上最古老的一个幻方：如图，将 1, 2, 3, ..., 9 填入 3×3 的方格内，使

三行，三列和两条对角线上的三个数字之和都等于 15。一般地，将连续的正整数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 填入 $n \times n$ 的方格中，使得每行，每列和两条对角线上的数字之和都相等，这个正方形叫做 n 阶幻方。记 n 阶幻方的每列的数字之和为 N_n ，如图，三阶幻方的 $N_3 = 15$ ，那么 $N_9 = ()$

4	9	2
3	5	7
8	1	6

A. 41

B. 369

C. 1476

D. 3321

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x}{x}, & x > 0 \\ \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right), & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ ，若 $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ 恰有 6 个不同实数解，正实数 ω 的

范围为 $()$

A. $\left(\frac{10}{3}, 4\right]$

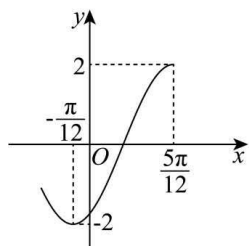
B. $\left[\frac{10}{3}, 4\right)$

C. $\left(2, \frac{10}{3}\right]$

D. $\left[2, \frac{10}{3}\right)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。）

9. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，则 $()$



A. $\omega = 2$

B. $\varphi = \frac{\pi}{3}$

C. 点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 直线 $x = \frac{11\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称轴

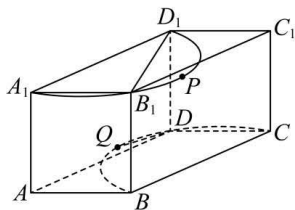
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a_4 = 13$ B. $\{a_n\}$ 是递增数列 C. $a_{10} < 1000$ D. $a_{n+1} = 2a_n + 1$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 若 $g(x) + f(x) = 1$, 且 $g(x+1), f(2-x)$ 均为奇函数, 则 ()

- A. $g(0) = -1$ B. $g(1) = 0$ C. $g(2) = 1$ D. $g(3) = 0$

12. 如图, 直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 是经过点 B_1 的半圆弧 $\widehat{A_1D_1}$ 上的动点 (不包括端点), 点 Q 是经过点 D 的半圆弧 $\widehat{BC}$ 上的动点 (不包括端点), 则下列说法正确的是 ()



A. 四面体 $PBCQ$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}$

B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A_1P}$ 的取值范围是 $[0, 4]$

C. 若二面角 $C_1 - QB - C$ 的平面角为 θ , 则 $\tan \theta > \frac{1}{2}$

D. 若三棱锥 $P - BCQ$ 的外接球表面积为 S , 则 $S \in [4\pi, 13\pi)$

第II卷 (非选择题, 共 90 分)

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知角 α 的顶点为原点, 始边为 x 轴的非负半轴, 若其终边经过点 $P(-1, 2)$, $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 命题 " $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 + ax + 1 \leq 0$ " 为假命题, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 设点 P_1, P_2, P_3 在 $\odot O$ 上, 若 $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \vec{0}$, 则 $\angle P_1P_2P_3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中的各项均大于 0, 且 $a_1 + a_3^2 + a_5 = 8$, 则 $\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_{11}}{a_3}$ 的范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(\pi + x) \cos x - \sqrt{3}$

(1) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $f(x)$ 的最值, 及取最值时对应的 x 的值;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, A 为锐角, 且 $f(A) = \sqrt{3}, a = \sqrt{3}, b + c = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - a$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象在 $x=0$ 处的切线为 $y = ax$.

(1) 设 $g(x) = f(x) + x^2 - x$, 求 $g(x)$ 的最小值;

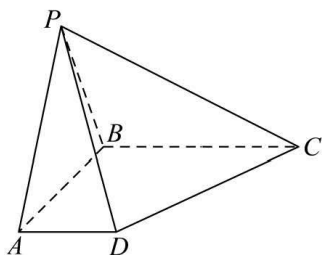
(2) 若 $\frac{f(x)}{x} > k$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且 $2nS_{n+1} - 2(n+1)S_n = n(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求证: 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列;

(2) 已知等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_3 = 5$, 其前 9 项和为 63. 令 $c_n = \frac{1}{a_n b_n}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{3}{4}$.

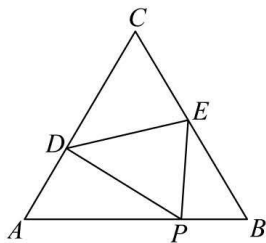
20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是边长为 2 的正三角形, $BC = AB$, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $AB \perp BC$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 设平面 $PAB \cap$ 平面 $PCD = l$, 问: 线段 PB 上是否存在一点 E , 使 $l \parallel$ 平面 ADE ?

(2) 平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.

21. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c(\cos A - \sqrt{3} \sin A) = b - 2a$, $c = 2$.



(1) 求角 C ;

(2) 若 $AB = BC$, 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 BC 上分别取点 D, E , 将 $\triangle CDE$ 沿线段 DE 折叠到平面 ABE 后, 顶点 C 恰好落在边 AB 上 (设为点 P), 设 $CE = x$, 当 CE 取最小值时, 求 $\triangle PBE$ 的面积.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $x_1 x_2 > 2e^2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线