

驻马店市 2023-2024 学年度高三年级期末统一考试

数学参考答案

1.B $z = \frac{1+i}{4-3i} = \frac{(1+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{1+7i}{25} = \frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$, 则 $\bar{z} = \frac{1}{25} - \frac{7}{25}i$.

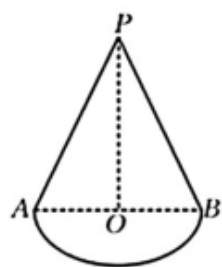
2.A 依题得 $B = \{x | x^2 - 3x - 4 = 0\} = \{x | -1, x, 4\}$, 则 $A \cap B = \{-1, 1, 3\}$.

3.C 由题可知 $a > 0$, 且 $4 - 4ac \geq 0$, 即 $ac \leq 1$, 所以 $a^2 + 4c^2 \geq 4ac \leq 4$, 当且仅当 $a = \sqrt{2}$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等

号成立, 则 $a^2 + 4c^2$ 的最小值为 4.

4.C 几何体的轴截面如图所示, 设圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 母线长为 l , 则球的半径也为 r . 因为圆锥的体积恰好等于半球的体积, 所以 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$, 得 $h = 2r$. 故 $l = \sqrt{r^2 + (2r)^2} = \sqrt{5}r$. 设圆锥的轴截面的

顶角为 α , 则 $\cos \alpha = \frac{(\sqrt{5}r)^2 + (\sqrt{5}r)^2 - (2r)^2}{2 \times \sqrt{5}r \times \sqrt{5}r} = \frac{6r^2}{10r^2} = \frac{3}{5}$.



5.B 由题意可知 $C_1(0,0)$, $C_2(-2,-2)$, 直线 AB 的方程为 $x + y + 2 = 0$, 易知四边形 C_1AC_2B 为菱形, 所

以 C_1 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$, 所以 $|AB| = 2\sqrt{4 - d^2} = 2\sqrt{2}$, 故

$S_{\text{四边形}C_1AC_2B} = 2 \cdot \frac{1}{2}d \cdot |AB| = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$.

6.A $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\tan \alpha + 1}$
 $= \frac{2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{3} = \frac{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha \cos \alpha}{3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{2(1 - \tan^2 \alpha) + 2\tan \alpha}{3(\tan^2 \alpha + 1)} = -\frac{2}{15}$.

7.C 若将体育书分给甲, 当剩余 4 本书恰好分给乙、丙时, 此时的分配方法有 $C_4^3 \cdot C_1 \cdot A_2^2 + \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2 = 14$

种, 当剩余 4 本书恰好分给甲、乙、丙三人时, 此时的分配方法有 $C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$ 种. 综上, 将体育书分给甲, 不同的分配方法数是 $14 + 36 = 50$.

同理, 将体育书分给乙, 不同的分配方法数也是 50. 故不同的分配方法数是 $50+50=100$.

8.D 不妨设点 A 在第一象限, 直线 AB 的倾斜角为 θ , 所以 $\cos\theta = \frac{|AF|-2}{|AF|}$, 则 $|AF| = \frac{2}{1-\cos\theta}$, 同理可

得 $|BF| = \frac{2}{1+\cos\theta}$. 因为 $|AF|=3|BF|$, 所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\angle AFO = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $|AF| = \frac{2}{1-\cos\theta} = 4$.

在 $\triangle AFO$ 中, $|OA| = \sqrt{|AF|^2 + |OF|^2 - 2|AF| \cdot |OF| \cos\angle AFO} = \sqrt{21}$.

9.ABC $P(80 < X, 90) = P(60, X < 70) = P(X < 70) - P(X < 60) = 0.2$,

$P(70, X, 80) = 1 - 2P(X < 70) = 0.4$, 故 A, B 正确. 无论 σ 为何值, $P(X \leq 75) = 0.5$, 若从高三男生中随机挑选 2 人, 则他们的成绩都不低于 75 的概率为 $0.5 \times 0.5 = 0.25$, 故 C 正确, D 错误.

10.BCD 由题得, $g(x) = -\sin\left(2x - \frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

令 $x = \frac{\pi}{6}$, 则 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 故 B 正确;

$g\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x$ 为偶函数, 故 C 正确;

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 故 D 正确.

11.BD $\frac{f(x)}{x}$ 的几何意义为过点 $(x, f(x))$, $(0, 0)$ 的直线的斜率. 易知直线 $y = kx$ 与

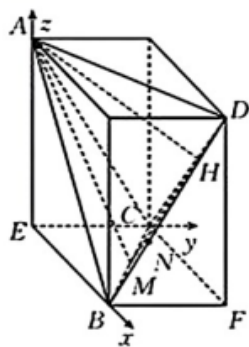
$f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x \in (0, 6), \\ e^{x-6} - 1, & x \in [6, +\infty) \end{cases}$ 的图象最多只有 4 个交点, 故 n 的最大值为 4. 当直线 $y = kx$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切

时, $\frac{f(x_1)}{x_1}$ 取得最大值, 设切点为 $A(x_0, \ln x_0)$, 则该直线的斜率为 $k = \frac{\ln x_0}{x_0}$, 又 $k = \frac{1}{x_0}$, 所以 $\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0}$,

解得 $x_0 = e$, 得 $A(e, 1)$, 所以 $\left[\frac{f(x_1)}{x_1}\right]_{\max} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{e}$.

12.BCD 由 $AD = BC = 4$, $AB = BD = DC = CA = 6$, 可将三棱锥 $A-BCD$ 补形成如图所示的长方体, 则

$AE = 2\sqrt{7}$, $EB = BF = 2\sqrt{2}$, 所以球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{(2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}}{2} = \sqrt{11}$, 所以球 O 的表面积为 44π , 故 A 错误. 易知 $BC \perp$ 平面 AMD , 过点 A 作 MD 的垂线, 交 MD 于 H , 故 AH 为点 A 到平面 BCD 的距离. 在 $\triangle AMD$ 中, $AM = MD = 4\sqrt{2}$, $AD = 4$, 解得 $AH = \sqrt{14}$, 故 B 正确. 以 E 为原点, EB , EC , EA 所在直线分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 2\sqrt{7})$, $D(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{7})$, $B(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{7})$, $\overrightarrow{BD} = (0, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{7})$. 设 $\overrightarrow{BN} = \lambda \overrightarrow{BD} = (0, 2\sqrt{2}\lambda, 2\sqrt{7}\lambda)$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0) + (0, 2\sqrt{2}\lambda, 2\sqrt{7}\lambda) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\lambda - \sqrt{2}, 2\sqrt{7}\lambda)$. 因为 $MN \perp AB$, 所以 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{7}$, 所以 $DN = 6NB$, 故 C 正确. 当且仅当 OM 与截面垂直时, 截面面积最小, 最小的半径为 2, 故 D 正确.



13.6 由题可知 $a_1 + a_2 + a_3 = 26$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} + \frac{a_2}{a_2^2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_2^2} = \frac{26}{a_2^2} = \frac{13}{18}$, 则 $a_2^2 = 36$, 解得 $a_2 = 6$.

14. $[-5, +\infty)$ 函数 $y = 2^x + m$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值域为 $(m+1, +\infty)$, $y = x^2 + 4x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的值域为 $[-4, +\infty)$, 则 $m+1 \leq -4$, 即 $m \leq -5$, 所以 m 的取值范围是 $[-5, +\infty)$.

15.3 因为 B , D , C 三点共线, 所以 $\frac{2}{3} + m = 1$, 解得 $m = \frac{1}{3}$, 即 D 为 CB 上靠近点 B 的三等分点. 利用向量的投影定义, 可知当 E 位于点 B 时, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OE}$ 取得最大值, 最大值为 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3} \times 3 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

16.2 设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的两条渐近线方程为 $y = x$ 和 $x = 0$,

其夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} = 1$, 解得 $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, 则 $\frac{b}{a} = \sqrt{2} - 1$, 且

$$\tan \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \text{ 所以 } y = x \text{ 和 } x = 0 \text{ 的角平分线的方程为 } y = (\sqrt{2} + 1)x. \text{ 联立 } \begin{cases} y = (\sqrt{2} + 1)x, \\ y = x + \frac{1}{x}, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $a^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 x^2 = (4 + 2\sqrt{2})x^2 = 2\sqrt{2} + 2$, $b^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 a^2 = 2\sqrt{2} - 2$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2\sqrt{2} + 2} - \frac{y^2}{2\sqrt{2} - 2} = 1$, 故 $(\sqrt{2} - 1)x_0^2 - (\sqrt{2} + 1)y_0^2 = 2$.

17. 解: (1) 由 $a \cos B + b \cos A = 2c \cos C$ 及正弦定理,

得 $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2 \sin C \cos C$,

则 $\cos C = \frac{1}{2}$, 即 $C = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{3}$.

(2) 由余弦定理可知 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 4$.

因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 所以 $c \geq 2$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

设 h 为 AB 边上的高, 所以 $S = \frac{1}{2} hc$, 即 $h = \frac{2S}{c} \leq \sqrt{3}$,

所以 AB 边上的高的最大值为 $\sqrt{3}$.

18. (1) 由题可知 $a_{2n} = a_{2n-1}$, $a_{2n+1} = a_{2n} + 2$

所以 $a_{2n+1} = a_{2n-1} + 2$,

即 $b_{n+1} = b_n + 2$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列,

则 $b_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

(2) $S_{30} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29} + a_{30} = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29})$

$$= 2(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{15}) = 2 \times \left(15 \times 1 + \frac{15 \times 14}{2} \times 2 \right) = 450$$

19. (1) 证明: 如图, 连接 DM .

因为四边形 $ACFD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAC = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\triangle ADC$ 为等边三角形, 则 $DM \perp AC$.

又平面 $ABC \perp$ 平面 $ACFD$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ACFD = AC$,

所以 $DM \perp$ 平面 ABC ,

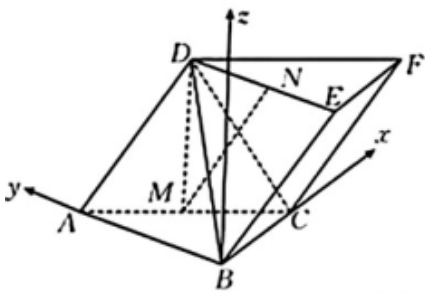
因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $DM \perp BC$.

因为 $AB \parallel DE$, $AB \perp BC$, 所以 $DE \perp BC$.

因为 $DM \cap DE = D$, 所以 $BC \perp$ 平面 NMD .

又 $MN \subset$ 平面 NMD , 所以 $BC \perp MN$.

(2) 解: 如图, 过 B 作 DM 的平行线为 z 轴, 结合 (1) 知 z 轴, BA , BC 两两垂直. 故可建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$, $C(1,0,0)$, $M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$, $A(0, \sqrt{3}, 0)$,

则 $\overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BA} = (0, \sqrt{3}, 0)$.

设平面 BCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

取 $y = 2$, 得 $z = -1$, 则 $\vec{n} = (0, 2, -1)$.

因为 N 为 DE 的中点, 所以 $\overrightarrow{DN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

又 $\overrightarrow{DM} = (0, 0, -\sqrt{3})$. 所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$.

$$\text{则} \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{MN}| |\vec{n}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{4}{5}.$$

设直线 MN 与平面 BCD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{MN}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{4}{5}$,

即直线 MN 与平面 BCD 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$.

20.解: (1) 由题可知, Y 的取值可能为 0, 1, 2.

$$P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

则 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$EY = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(2) 由题可知 $P_1 = 0$, 当 $n \geq 2$ 时, $n-1$ 次底面的数字之和能被 3 整除的概率为 P_{n-1} ,

$$\text{所以 } P_n = \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}),$$

则 $P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right)$, 所以数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\text{则 } P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{即 } P_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

21.解: (1) 由题意得 $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{|x+4|} = \frac{1}{2},$

$$\text{化简得 } 3x^2 + 4y^2 = 12, \text{ 即 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

故曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆.

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $y = k(x+1)$,

$$\text{则 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \quad \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$$

$$\text{所以 } |AF_1| = \sqrt{(x_1+1)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1+1)^2 + 3 - \frac{3x_1^2}{4}} = \frac{1}{2}x_1 + 2, \quad |BF_1| = \frac{1}{2}x_2 + 2.$$

(也可以根据题目条件得出 $|AF_1| = \frac{1}{2}(x_1 + 4) = \frac{1}{2}x_1 + 2$, $|BF_1| = \frac{1}{2}(x_2 + 4) = \frac{1}{2}x_2 + 2$)

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = k(x+1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{整理得} (3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta > 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{3+4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$$

$$\text{所以线段 } AB \text{ 的中点为 } G\left(\frac{-4k^2}{3+4k^2}, \frac{3k}{3+4k^2}\right),$$

$$\text{所以线段 } AB \text{ 的垂直平分线方程为 } y - \frac{3k}{3+4k^2} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{4k^2}{3+4k^2}\right).$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 可得 } x = \frac{-k^2}{3+4k^2}, \text{ 即 } Q\left(\frac{-k^2}{3+4k^2}, 0\right).$$

$$\text{因为 } \frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|} = \frac{1}{\frac{1}{2}x_1 + 2} + \frac{1}{\frac{1}{2}x_2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 4}{\frac{1}{4}x_1x_2 + x_1 + x_2 + 4} = \frac{-4k^2 + 4(3+4k^2)}{k^2 - 3 - 8k^2 + 4(3+4k^2)} = \frac{4}{3},$$

$$\text{由 } 14|F_1A||F_1B||F_1Q| = 9(|F_1A| + |F_1B|), \text{ 可得 } |F_1Q| = \frac{9}{14} \times \left(\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_1|}\right),$$

$$\text{则 } \left|\frac{-k^2}{3+4k^2} + 1\right| = \frac{6}{7}, \text{ 解得 } k^2 = 1,$$

所以 l 的方程为 $x \pm y + 1 = 0$.

22. (1) 解: 由 $ax - \ln x = 0$ 且 $x > 0$, 可得 $\frac{\ln x}{x} = a$.

$$\text{设 } F(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty), \text{ 则 } F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } F'(x) = 0, \text{ 解得 } x = e.$$

当 $0 < x < e$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增;

当 $x > e$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减.

又当 x 趋向于 0 时, $F(x)$ 趋向于 $-\infty$, 当 x 趋向于 $+\infty$ 时, $F(x)$ 趋向于 0,

所以要使 $F(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 有两个交点, 则 $0 < a < F(e)$,

故 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

(2) 证明: $F(1)=0$, 由 (1) 得 $1 < x_1 < e < x_2$,

$$\text{则 } a = \frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\ln x_2}{\ln x_1}.$$

$$\text{设 } \frac{x_2}{x_1} = t (t > 1), \text{ 则 } t = \frac{\ln t + \ln x_1}{\ln x_1},$$

$$\text{即 } \ln x_1 = \frac{\ln t}{t-1}, \quad \ln x_2 = \frac{t \ln t}{t-1}$$

$$\ln(x_1^2 x_2) = 2 \ln x_1 + \ln x_2 = \frac{(t+2) \ln t}{t-1}.$$

$$\text{设 } g(t) = \frac{(t+2) \ln t}{t-1} (t > 1), \text{ 则 } g'(t) = \frac{-3 \ln t + t - \frac{2}{t} + 1}{(t-1)^2}.$$

$$\text{设 } G(t) = -3 \ln t + t - \frac{2}{t} + 1, \text{ 则 } G'(t) = -\frac{3}{t} + 1 + \frac{2}{t^2} = \frac{(t-1)(t-2)}{t^2},$$

当 $t \in (1, 2)$ 时, $G'(t) < 0$, $G(t)$ 单调递减,

当 $t \in (2, +\infty)$ 时, $G'(t) > 0$, $G(t)$ 单调递增.

$$\text{又 } G(1) = 0, \quad G(2) < G(1) = 0, \quad G(e^2) = -6 + e^2 - \frac{2}{e^2} + 1 > 0,$$

所以存在唯一的 $t_0 \in (2, e^2)$, 使得 $G(t_0) = 0$,

$$\text{即 } -3 \ln t_0 + t_0 - \frac{2}{t_0} + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } g(t) \text{ 的最小值为 } g(t_0), \quad g(t_0) = \frac{(t_0+2) \ln t_0}{t_0-1} = \frac{t_0+2}{t_0-1} \cdot \frac{t_0 - \frac{2}{t_0} + 1}{3} = \frac{1}{3} \left(t_0 + \frac{4}{t_0} + 4 \right) > \frac{8}{3},$$

所以 $\ln(x_1^2 x_2) > \frac{8}{3}$, 故 $x_1^2 x_2 > e^{\frac{8}{3}}$.