2023—2024 学年高三年级冬季教学质量检测

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. **答案**　B

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　由题意知$\{a+2,2a+1\}\subseteq\{2,3,4,5,6\}$,当且仅当$a=2$时满足题意.

2. **答案**　A

命题意图　本题考查复数的基本运算.

解析　$z=(3+3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=3(1-\mathrm{i}^2)=6$,所以$|z+8\mathrm{i}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

3. **答案**　B

命题意图　本题考查平面向量的运算性质.

解析　因为$|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2$,$|\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+16\boldsymbol{b}^2$,以上两式相减,可得$16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|^2$,即$16\times2=|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2-2^2$,所以$|\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|=6$.

4. **答案**　C

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　由已知可得$S_5=5a_3=5$,所以$a_3=1$,设$\{a_n\}$的公差为d,则$2d=a_5-a_3=4$,所以$d=2$.

5. **答案**　C

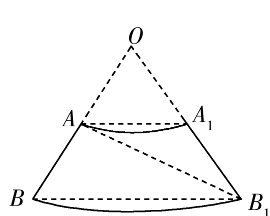
命题意图　本题考查函数模型的应用.

解析　设血浆中的药物浓度从最大值 80 mg/L 下降到 8 mg/L 需要经过n h,则$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2.4}}=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$,得$n=\frac{2.4}{\lg 2}\approx8$,故从服药后开始到血浆中的药物浓度下降到 8 mg/L 需要$8+2=10$(h).

6. **答案**　B

命题意图　本题考查圆台的结构特征及相关计算.

解析　将圆台的侧面沿着母线AB剪开,展成如图所示的平面,延长BA,B_1A_1交于点O,连接AA_1,AB_1,BB_1,依题知弧BB_1的长为$\frac{2\pi}{3}$,弧AA_1的长为$\frac{\pi}{3}$. 设$\angle BOB_1=\alpha$,则$\alpha\times OA=\frac{\pi}{3}$,$\alpha\times OB=\frac{2\pi}{3}$,$\therefore OB=2OA$,即$OA+1=2OA$,得$OA=1$,$\therefore A$是$OB$的中点,$\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\therefore\triangle OBB_1$是等边三角形,$\therefore AB_1\perp OB$,$\therefore AB_1$与弧$AA_1$相切,$\therefore AB_1$在此侧面展开图内,蚂蚁爬行的最短路线即线段$AB_1$. $\because OB=OB_1=2$,$\therefore AB_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.



7. 答案

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　因为 $f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个最大值点，即直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，又 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，所以 $f(0)=\sqrt{3}$，所以 $a=\sqrt{3}$，此时 $f(x)=\sqrt{3}\cos\omega x+\sin\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，由 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取得最大值可得 $\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=12k+1(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $\omega>1$，故 ω 的最小值为 13.

8. 答案　A

命题意图　本题考查函数的性质.

解析　对任意 $x\in D$，设 $y=f(x)=\ln\frac{2e^x-1}{e^x+a}$，则 $e^y=\frac{2e^x-1}{e^x+a}$，整理可得 $e^x=\frac{-ae^y-1}{e^y-2}$①. 由 $f(f(x))=x$ 得 $f(y)=x$，可得 $e^x=\frac{2e^y-1}{e^y+a}$②，对比①②，可知 $a=-2$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 答案　AD

命题意图　本题考查空间线面位置关系的判断.

解析　B 项中 m 与 n 还可以平行或相交，故 B 错误，C 项中，可能 $m\subset\alpha$，故 C 错误，A，D 中的命题均正确.

10. 答案　ACD

命题意图　本题考查利用导数研究函数的极值.

解析　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x}=\frac{x^2-3x+2}{x^2}=\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$，分析单调性可知极大值点为 1，极小值点为 2，即 $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=1,\end{cases}$ 故 A 正确，B 错误；$f(1)+f(2)=-1+1-3\ln 2=-3\ln 2$，故 C 正确；由 $f(x)$ 的单调性可得 $f(x_1)<f(x_2)$，故 D 正确.

11. 答案　BD

命题意图　本题考查三角恒等变换的应用.

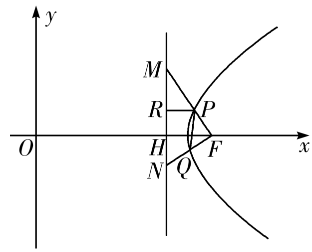
解析　由题意可得 $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{3}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，故 A 错误；$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{6}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<0$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\frac{\sqrt{11}}{6}$，故 B 正确；因为 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{\sqrt{35}}{6}$，所以 $\cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\frac{5+\sqrt{385}}{36}$，故 C 错误；同理可得 $\cos 2\beta=\frac{5-\sqrt{385}}{36}>\frac{5-20}{36}>-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$，故 $2\beta<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\beta<\frac{\pi}{3}$，故 D 正确.

12. 答案　BC

命题意图　本题考查双曲线的性质，双曲线与直线的位置关系.

解析　对于 A，易得 $F(2,0)$，设 $H\left(\frac{3}{2},0\right)$，则 $|FH|=\frac{1}{2}$，设 $|HM|=x$，$|HN|=y$，由三角形相似可得 $xy=\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

$\frac{1}{4}$,所



对于 B,设 $P(x_0,y_0)$,则 $|PR|=x_0-\frac{3}{2}$,由 $x_0^2-3y_0^2=3$,得 $y_0^2=\frac{x_0^2}{3}-1$,所以 $|PF|=\sqrt{x_0^2-4x_0+4+y_0^2}=\sqrt{\frac{4}{3}x_0^2-4x_0+3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x_0-\frac{3}{2}\right)$,所以 $\frac{|PR|}{|PF|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 B 正确;

对于 C,由 $\angle MFN=\frac{\pi}{2}$,可得 $\frac{|MP|}{|PR|}=\frac{|MN|}{|NF|}$,所以 $\frac{|MP|}{\frac{\sqrt{3}}{2}|PF|}=\frac{|MN|}{|NF|}$,整理得 $\frac{|MP|\cdot|NF|}{|MN|\cdot|PF|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,为定值,故 C 正确;

对于 D,易知 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|FM|\cdot|FN|}{|FP|\cdot|FQ|}$,设 $\angle MFH=\alpha$,则 $|FM|=\frac{|FH|}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}$,$|FN|=\frac{|FH|}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin\alpha}$,设 $|FP|=m$,则 $|PR|=\frac{\sqrt{3}}{2}m=(|FM|-m)\cos\alpha$,解得 $m=\frac{1}{\sqrt{3}+2\cos\alpha}$,同理可得 $|FQ|=\frac{1}{\sqrt{3}+2\sin\alpha}$,所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|FM|\cdot|FN|}{|FP|\cdot|FQ|}=\frac{(\sqrt{3}+2\cos\alpha)(\sqrt{3}+2\sin\alpha)}{4\cos\alpha\sin\alpha}=1+\frac{2\sqrt{3}(\sin\alpha+\cos\alpha)+3}{4\sin\alpha\cos\alpha}$,令 $t=\sin\alpha+\cos\alpha\in(1,\sqrt{2}]$,则 $\frac{S_1}{S_2}=1+\frac{2\sqrt{3}t+3}{2(t^2-1)}$,设 $\varphi(t)=1+\frac{2\sqrt{3}t+3}{2(t^2-1)}$,则 $\varphi'(t)=-\frac{\sqrt{3}(t^2+\sqrt{3}t+1)}{(t^2-1)^2}<0$,所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,\sqrt{2}]$ 上单调递减,故 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(\sqrt{2})=\frac{5}{2}+\sqrt{6}$,故 D 错误.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** 2

命题意图 本题考查圆锥的结构特征.

解析 设该圆锥的底面半径和母线长分别为 r,l,母线与底面所成的角为 θ,由题意可得 $\pi rl=\sqrt{5}\pi r^2$,$l=\sqrt{5}r$,由勾股定理可得圆锥的高 $h=\sqrt{5r^2-r^2}=2r$,所以 $\tan\theta=\frac{h}{r}=2$.

14. **答案** $[-7,11]$

命题意图 本题考查圆的方程,直线与圆的位置关系.

解析 设 $x+2\sqrt{2}y=\lambda$,则直线 $x+2\sqrt{2}y=\lambda$ 与 C 有公共点.圆 C 的方程化为标准方程为 $(x-2)^2+y^2=9$,圆心 $C(2,0)$,半径为 3,$\therefore$ 圆心到直线 $x+2\sqrt{2}y=\lambda$ 的距离 $d\leqslant 3$,即 $\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{1+8}}\leqslant 3$,$\therefore$ $|2-\lambda|\leqslant 9$,$\therefore$ $-7\leqslant\lambda\leqslant 11$,即 $x+2\sqrt{2}y$ 的取值范围是 $[-7,11]$.

15. **答案** $\frac{\sqrt{30}}{6}$

命题意图 本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析 $k_{PA'}=$

$a=3x_0$,

$\frac{y_0}{x_0-a}=-\frac{1}{2}$,则 $-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}$,所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{6}$,离心率为$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

16. **答案** $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{\mathrm{e}\}$

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 令 $f(x)=m^x$,$g(x)=2x\mathrm{e}^{x+1}$,由题知有且仅有一个 x_0 使得 $f(x_0)=-g(-x_0)$,即方程 $m^x=2x\mathrm{e}^{1-x}$有且仅有一个实数根,即曲线 $y=(m\mathrm{e})^x$ 与 $y=2\mathrm{e}x$ 仅有一个公共点. 当 $0<m\mathrm{e}<1$,即 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,由指数函数的图象性质可知,曲线 $y=(m\mathrm{e})^x$ 与直线 $y=2\mathrm{e}x$ 只有一个交点,符合题意. 当 $m\mathrm{e}=1$,即 $m=\frac{1}{\mathrm{e}}$时,显然符合题意. 当 $m\mathrm{e}>1$ 且 $m\neq1$,即 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$且 $m\neq1$ 时,显然 $x<0$ 时无公共点,当 $x>0$ 时,令$(m\mathrm{e})^x=2\mathrm{e}x$,得 $\ln(m\mathrm{e})=\frac{\ln(2\mathrm{e}x)}{x}$,令 $h(x)=\frac{\ln(2\mathrm{e}x)}{x}$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln(2\mathrm{e}x)}{x^2}$,所以 $h(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在区间$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{2}\right)=2$. 又当 $x>0$,$x\to0$ 时,$h(x)\to-\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to0$,且 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$\ln(m\mathrm{e})>0$,所以由题知 $\ln(m\mathrm{e})=2$,即 $m=\mathrm{e}$,所以 m 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]\cup\{\mathrm{e}\}$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查等比数列和等差数列的性质及求和公式.

解析 (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$, ……(1 分)

因为$\begin{cases}S_3=39,\\a_3-a_2=18,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1(1+q+q^2)=39,\\a_1(q^2-q)=18,\end{cases}$ ……(2 分)

两式作商得$\frac{1+q+q^2}{q^2-q}=\frac{39}{18}$,解得 $q=3$(负值舍去), ……(4 分)

所以 $a_1=3$, ……(5 分)

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}=3^n$. ……(6 分)

(Ⅱ)由题意得 $a_n-b_n=2+3(n-1)=3n-1$, ……(7 分)

所以 $b_n=a_n-(3n-1)=3^n-(3n-1)$, ……(8 分)

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-\frac{n(2+3n-1)}{2}=\frac{3^{n+1}}{2}-\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}$. ……(10 分)

18. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由 $a=\frac{(a-b)(a+b)+c^2}{2a-b}$,化简得 $a^2+b^2-c^2=ab$, ……(1 分)

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$, ……(3 分)

又因为 $0<C<\pi$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……(4 分)

(Ⅱ)由 $a^2+b^2-c^2=ab$ 及正弦定理得 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=\sin A\sin B$,

即 sin 6 分)

由基本不等式得 $\sin A\sin B\leqslant\frac{1}{2}(\sin^2A+\sin^2B)$, …………………………………………………………(8 分)

所以 $\sin^2A+\sin^2B-\frac{3}{4}\leqslant\frac{1}{2}(\sin^2A+\sin^2B)$,

即 $\sin^2A+\sin^2B\leqslant\frac{3}{2}$, …………………………………………………………………………………(10 分)

当且仅当 $\sin A=\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即△$ABC$ 为等边三角形时,等号成立. ……………………………………(11 分)

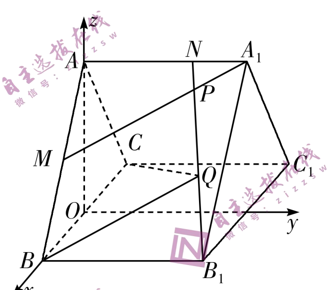
所以 $\sin^2A+\sin^2B$ 的最大值为$\frac{3}{2}$. ………………………………………………………………………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查利用空间向量研究空间位置关系以及计算二面角.

解析 (Ⅰ)因为 C,M,P,A_1 四点共面,所以 M,P,A_1 三点共线. …………………………………………(1 分)

如图,取 BC 的中点 O,连接 AO,可得 $AO\perp BC$,又平面 $ABC\perp$平面 BCC_1B_1,平面 $ABC\cap$平面 $BCC_1B_1=BC$,所以 $AO\perp$平面 BCC_1B_1.

故以 O 为坐标原点,OB,OA 所在直线分别为 x,z 轴,过点 O 且垂直于平面 ABC 的直线为 y 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$. …………………………………………………………………………(2 分)



易知 $A(0,0,2\sqrt{3}),B(2,0,0),C(-2,0,0),A_1(0,3,2\sqrt{3}),B_1(2,3,0),M(1,0,\sqrt{3}),N(0,2,2\sqrt{3})$.

所以$\overrightarrow{MB_1}=(1,3,-\sqrt{3}),\overrightarrow{B_1N}=(-2,-1,2\sqrt{3}),\overrightarrow{MA_1}=(-1,3,\sqrt{3})$. ……………………………(3 分)

所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{MB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1N}=(1-2\lambda,3-\lambda,2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$,

由 M,P,A_1 三点共线,得$\frac{1-2\lambda}{-1}=\frac{3-\lambda}{3}=\frac{2\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, ………………………………………………(5 分)

解得 $\lambda=\frac{6}{7}$. ……………………………………………………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$\overrightarrow{B_1Q}=\frac{3}{7}\overrightarrow{B_1N}=\left(-\frac{6}{7},-\frac{3}{7},\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)$,得 $Q\left(\frac{8}{7},\frac{18}{7},\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)$, ……………………………(7 分)

所以$\overrightarrow{BQ}=\left(-\frac{6}{7},\frac{18}{7},\frac{6\sqrt{3}}{7}\right),\overrightarrow{CB}=(4,0,0)$. ………………………………………………………(8 分)

设平面 QBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{6}{7}x+\frac{18}{7}y+\frac{6\sqrt{3}}{7}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=4x=0,\end{cases}$令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$, ……………………………(10 分)

又因

故 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{1\times 2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………………………………………… (11 分)

结合图可知二面角 $Q-BC-B_1$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以二面角 $Q-BC-B_1$ 的大小为$\dfrac{\pi}{6}$. ……………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查等比数列的性质.

解析 (Ⅰ)由题知 $a_1+a_3-1=2a_2$,即 $a_1(q-1)^2=1$. ……………………………………………… (1 分)

$d=a_2-a_1=a_1(q-1)=\dfrac{1}{q-1}$. ……………………………………………………………………………… (2 分)

当 $q>1$ 时,$q+d=q-1+\dfrac{1}{q-1}+1\geqslant 3$, ……………………………………………………………… (4 分)

当且仅当 $q-1=\dfrac{1}{q-1}$,即 $q=2$ 时等号成立.

所以 $q+d$ 的最小值为 3. ……………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,当 $q+d$ 取最小值时,$q=2,d=1,a_1=1$, ……………………………………………… (6 分)

所以 $a_n=2^{n-1},b_n=n$. ……………………………………………………………………………………… (7 分)

所以 $c_n=\dfrac{a_n(b_n-1)}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{2^{n-1}(n-1)}{n(n+1)}=\dfrac{2^n}{n+1}-\dfrac{2^{n-1}}{n}$, ……………………………………………………… (8 分)

$$\begin{aligned}\text{所以 } T_n&=(1-1)+\left(\frac{4}{3}-1\right)+\left(\frac{8}{4}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{2^n}{n+1}-\frac{2^{n-1}}{n}\right)\\&=-1+1-1+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{8}{4}-\cdots-\frac{2^{n-1}}{n}+\frac{2^n}{n+1}\\&=\frac{2^n}{n+1}-1.\end{aligned}$$
…… (10 分)

又$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{2^n}{n+1}$,所以 $T_n-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=-1<0$,所以 $T_n<\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$. ……………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (Ⅰ)$f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, ……………………………………………………………………………… (1 分)

直线 $y=x+2$ 的斜率为 1,令$\dfrac{1-x}{e^x}=1$,得 $e^x+x=1$, …………………………………………………… (2 分)

易知 $\varphi(x)=e^x+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,而 $\varphi(0)=1$,所以方程 $\varphi(x)=1$ 有唯一解 $x=0$, ………………… (3 分)

故曲线 $y=f(x)$ 的平行于直线 $y=x+2$ 的切线只有一条,即在点 $(0,0)$ 处的切线 $y=x$. ……………… (4 分)

(Ⅱ)因为 $g(x)=g(x+2\pi)$,所以 $g(x)$ 的一个周期是 2π. ……………………………………………… (5 分)

$g'(x)=e^{\sin x}\cos x-e^{\cos x}\sin x=\left(\dfrac{\cos x}{e^{\cos x}}-\dfrac{\sin x}{e^{\sin x}}\right)e^{\sin x+\cos x}=e^{\sin x+\cos x}[f(\cos x)-f(\sin x)]$, ……………… (6 分)

而 $e^{\sin x+\cos x}>0$,因此 $g'(x)$ 的正负与 $f(\cos x)-f(\sin x)$ 的正负一致. ……………………………… (7 分)

由(Ⅰ)知当 $x\leqslant 1$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 单调递增, ……………………………………………………… (8 分)

所以 $f(\cos x)>f(\sin x)$ 等价于 $\cos x>\sin x$,$f(\cos x)<f(\sin x)$ 等价于 $\cos x<\sin x$. ……………… (9 分)

由 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象知,当 $x\in\left(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 时,$\cos x>\sin x$;

当 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 时,$\cos x<\sin x$. ……………………………………………… (11 分)

故 $g($

…………………………………………………………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查抛物线的性质，抛物线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）联立方程得$\begin{cases}y^2=2px,\\ y=-2x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{p}{2},\\ y=-p,\end{cases}$

则 $O(0,0)$，$M\left(\dfrac{p}{2},-p\right)$，…………………………………………………（2 分）

则$|OM|=\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+(-p)^2}=\sqrt{5}$，解得 $p=2$，…………………………（3 分）

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $M(1,-2)$，设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right)$，不妨令 $y_1<y_2$.

因为直线 l_1 与 l_2 的斜率互为相反数，

所以$\dfrac{y_1+2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=-\dfrac{y_2+2}{\dfrac{y_2^2}{4}-1}$，即$\dfrac{y_1+2}{(y_1+2)(y_1-2)}=-\dfrac{y_2+2}{(y_2+2)(y_2-2)}$，……………（5 分）

整理得 $y_1+y_2=4$，所以 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{\dfrac{y_2^2}{4}-\dfrac{y_1^2}{4}}=1$，…………………………………（6 分）

则直线 AB：$y-y_2=x-\dfrac{y_2^2}{4}$，即 $x-y+y_2-\dfrac{y_2^2}{4}=0$，

点 $M(1,-2)$ 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{\left|3+y_2-\dfrac{y_2^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}$，……………………………（7 分）

$|AB|=\sqrt{2}(y_2-y_1)=2\sqrt{2}(y_2-2)$，……………………………………（8 分）

所以 $S=\dfrac{\left|3+y_2-\dfrac{y_2^2}{4}\right|}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}(y_2-2)=\dfrac{1}{2}|(y_2-2)^2-16|(y_2-2)$，…………（9 分）

令 $y_2-2=t$，由 $y_2>y_1>-2$，$y_1+y_2=4$，可得 $2<y_2<6$，则 $0<t<4$，

所以 $S=\dfrac{1}{2}|t^3-16t|=\dfrac{1}{2}(16t-t^3)$. ……………………………………（10 分）

则 $S'=\dfrac{16-3t^2}{2}$，令 $S'=0$，得 $t=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

当 $t\in\left(0,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$时，$S$ 关于 t 单调递增，当 $t\in\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$时，$S$ 关于 t 单调递减，…………（11 分）

所以当 $t=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$时，S 取得最大值$\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$，

因此，四边形 $ABDM$ 面积的最大值为$\dfrac{64\sqrt{3}}{9}$. ……………………………………（12 分）