2024年1月“七省联考”押题预测卷03

数　学

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\{x|(3x-4)(x-5)\le 0\}$，$B=\{x|2x<8\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$(-\infty,5]$　　B．$\left[\frac{4}{3},5\right]$　　C．$\left[\frac{3}{4},4\right)$　　D．$\left[\frac{4}{3},4\right)$

【答案】D

【解析】因为 $A=\{x|(3x-4)(x-5)\le 0\}=\left[\frac{4}{3},5\right]$，$B=\{x|2x<8\}=(-\infty,4)$，

所以 $A\cap B=\left[\frac{4}{3},4\right)$．

故选：D．

2．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\sin x=1$”是“$\cos x=0$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】因为 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 可得：

当 $\sin x=1$ 时，$\cos x=0$，充分性成立；

当 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm 1$，必要性不成立；

所以当 $x\in\mathbf{R}$，$\sin x=1$ 是 $\cos x=0$ 的充分不必要条件．

故选：A．

3．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，若 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{a}$，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为（　　）

A．$\frac{1}{4}\vec{b}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{b}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$　　D．$\vec{b}$

【答案】A

【解析】因为$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，所以$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore\left|\vec{a}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|=0$，又$\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，所以$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$，$\therefore\left|\vec{a}\right|=1$或$\left|\vec{a}\right|=0$（舍去），

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2=1$，

所以$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\vec{b}$.

故选：A

4．形如$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$我们称为“二阶行列式”，规定运算$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$，若在复平面上的一个点$A$对应复数为$z$，其中复数$z$满足$\begin{vmatrix}z & 1-\mathrm{i}\\ 1+2\mathrm{i} & 1\end{vmatrix}=\mathrm{i}$，则点$A$在复平面内对应坐标为（　　）

A．$(3,2)$　　B．$(2,3)$　　C．$(-2,3)$　　D．$(3,-2)$

【答案】A

【解析】由题意可得：$z-(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=z-\left(3+\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}$，

则$z=\mathrm{i}+\left(3+\mathrm{i}\right)=3+2\mathrm{i}$，

所以点A在复平面内对应坐标为$(3,2)$.

故选：A.

5．已知圆$C_1:x^2+y^2+4x+3=0$，圆$C_2:x^2+y^2-8x+12=0$，下列直线中不能与圆C_1，C_2同时相切的是（　　）

A．$\sqrt{3}x+3y=0$　　B．$\sqrt{3}x-3y=0$

C．$x+\sqrt{35}y+8=0$　　D．$x-\sqrt{35}y-8=0$

【答案】D

【解析】由题意知：$C_1:\left(x+2\right)^2+y^2=1,C_2:\left(x-4\right)^2+y^2=4$，

所以圆C_1的圆心为$(-2,0)$，半径为1；圆C_2的圆心为$(4,0)$，半径为2，

对于A，圆C_1的圆心$(-2,0)$到直线的距离为$d_1=\frac{\left|-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}}=1$，与半径相等，故满足相切条件，

圆C_2的圆心$(4,0)$到直线的距离为$d_2=\frac{\left|4\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}}=2$，与半径相等，故也满足相切条件，

即直线$\sqrt{3}x+3y=0$是两圆的一条公切线；

对于B，圆C_1的圆心$(-2,0)$到直线的距离为$d_1=\frac{\left|-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}}=1$，与半径相等，故满足相切条件，

圆 C_2 的圆心 $(4,0)$ 到直线的距离为 $d_2=\dfrac{|4\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=2$，与半径相等，故也满足相切条件，

即直线 $\sqrt{3}x-3y=0$ 是两圆的一条公切线；

对于 C，圆 C_1 的圆心 $(-2,0)$ 到直线的距离为 $d_1=\dfrac{|-2+8|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{35})^2}}=1$，与半径相等，故满足相切条件，

圆 C_2 的圆心 $(4,0)$ 到直线的距离为 $d_2=\dfrac{|4+8|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}}=2$，与半径相等，故也满足相切条件，

即直线 $x+\sqrt{35}y+8=0$ 是两圆的一条公切线；

对于 D，圆 C_1 的圆心 $(-2,0)$ 到直线的距离为 $d_1=\dfrac{|-2-8|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{35})^2}}=\dfrac{5}{3}\neq 1$，不满足相切条件，

即直线 $x-\sqrt{35}y-8=0$ 不可能是两圆的公切线；

故选：D.

6．若函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 内恰好存在 4 个 x_0，使得 $f(x_0)=1$，则 ω 的取值范围为（　　）

A. $\left[\dfrac{19}{6},\dfrac{9}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{19}{6},\dfrac{9}{2}\right]$　　C. $\left[\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{9}{2}\right]$

【答案】B

【解析】令 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，则 $\omega x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,$ 或 $\omega x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$，

即 $\omega x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,$ 或 $\omega x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

故 ωx 可取 $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{2},\dfrac{19\pi}{6},\dfrac{9\pi}{2},\cdots$，

由于 $x\in(0,\pi)$，则 $\omega x\in(0,\omega\pi)$，

要使在 $(0,\pi)$ 内恰好存在 4 个 x_0，使得 $f(x_0)=1$，则 $\dfrac{19\pi}{6}<\omega\pi\le\dfrac{9\pi}{2}$，解得 $\dfrac{19}{6}<\omega\leqslant\dfrac{9}{2}$，

故选：B

7．净水机通过分级过滤的方式使自来水逐步达到纯净水的标准，其工作原理中有多次的 PP 棉滤芯过滤，其中第一级过滤一般由孔径为 5 微米的 PP 棉滤芯（聚丙烯熔喷滤芯）构成，其结构是多层式，主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质，假设每一层 PP 棉滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质，若过滤前水中大颗粒杂质含量为 80mg/L，现要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过 2mg/L，则 PP 棉滤芯的层数最少为（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）（　　）

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

【答案】A

【解析】设经过 n 层 PP 棉滤芯过滤后的大颗粒杂质含量为 y，则 $y=80\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^n=80\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$，

令 $80\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\le 2$，解得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n\le\frac{1}{40}$，两边取常用对数得 $n\lg\frac{2}{3}\le\lg\frac{1}{40}$，即 $n\lg\frac{3}{2}\ge\lg 40$

即 $n\left(\lg 3-\lg 2\right)\ge 1+2\lg 2$，因为 $\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$，

所以 $\left(0.48-0.30\right)n\ge 1.60$，解得 $n\ge\frac{80}{9}$，因为 $n\in N^*$，所以 n 的最小值为 9.

故选：A

8．设 $a=\frac{1}{5}\cos\frac{1}{5}$，$b=\sin\frac{1}{5}$，$c=e^{-\frac{4}{5}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）.

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

【答案】D

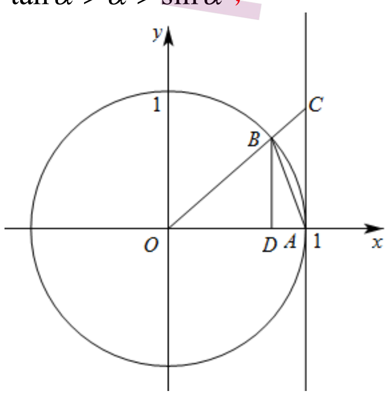
【解析】设 $\angle AOB=\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，作出单位圆，与 x 轴交于 A 点，则 $A(1,0)$，

过点 A 作 AC 垂直于 x 轴，交射线 OB 于点 C，连接 AB，过点 B 作 $BD\perp x$ 轴于点 D，

由三角函数定义可知 $AC=\tan\alpha$，$BD=\sin\alpha$，$\overset{\frown}{AB}=\alpha$，

设扇形 OAB 的面积为 S_1，则 $S_{\triangle OAC}>S_1>S_{\triangle ABO}$，即 $\frac{1}{2}\tan\alpha>\frac{1}{2}\alpha>\frac{1}{2}\sin\alpha$，故

$\tan\alpha>\alpha>\sin\alpha$，



因为 $\frac{1}{5}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\frac{1}{5}>\frac{1}{5}>\sin\frac{1}{5}$，

又 $\cos\frac{1}{5}>0$，由 $\tan\frac{1}{5}>\frac{1}{5}$ 得 $\sin\frac{1}{5}>\frac{1}{5}\cos\frac{1}{5}$，即 $b>a$，

令 $f(x)=e^x-x-1$，$x<0$，

则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x<0$ 时，$f'(x)=e^x-1<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以 $f\left(-\frac{4}{5}\right)>f(0)=0$，所以 $e^{-\frac{4}{5}}>\frac{1}{5}$，

故 $c>b$，

综上，$a<b<c$.

故选：D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列说法正确的是（　　）

A. 已知随机变量ξ服从二项分布：$\xi\sim B\left(8,\frac{3}{4}\right)$，设$\eta=2\xi+1$，则$\eta$的方差$D(\eta)=3$

B. 数据$1,3,5,7,9,11,13$的第 60 百分位数为 9

C. 若样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为 2，则$3x_1+2,3x_2+2,\cdots,3x_n+2$的平均数为 8

D. 用简单随机抽样的方法从 51 个个体中抽取 2 个个体，则每个个体被抽到的概率都是$\frac{1}{51}$

【答案】BC

【解析】对于 A，易知$D(\xi)=8\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}$，而$\eta=2\xi+1$，

所以$D(\eta)=2^2\times D(\xi)=6$，A 错误；

对于 B，共有 7 个数据，而$7\times60\%=4.2$，故第 60 百分位数为 9，B 正确；

对于 C，若样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为 2，

则$3x_1+2,3x_2+2,\cdots,3x_n+2$的平均数为$3\times2+2=8$，C 正确；

对于 D，由古典概型可知：从 51 个体中抽取 2 个个体，

每个个体被抽到的概率都是$\frac{2}{51}$，D 错误.

故选：BC

10．在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$A_1B_1=2$，$AA_1=\sqrt{2}$则（　　）

A. 该正四棱台的体积为$\frac{19\sqrt{2}}{6}$

B. 直线AA_1与底面$ABCD$所成的角为60°

C. 线段A_1C的长为 10

D. 以A_1为球心，且表面积为6π的球与底面$ABCD$相切

【答案】BD

【解析】连接AC，A_1C，过A_1作$A_1H\perp AC$，垂足为H.

因为$AB=3$，$A_1B_1=2$，所以$AC=3\sqrt{2}$，$A_1C_1=2\sqrt{2}$，

所以$AH=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$A_1H=\sqrt{AA_1^2-AH^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

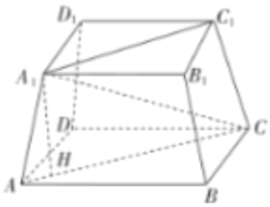
所以该正四棱台的体积$V=\frac{A_1H}{3}\times\left(AB^2+\sqrt{AB^2\cdot A_1B_1^2}+A_1B_1^2\right)=\frac{19\sqrt{6}}{6}$，A 错误.

直线AA_1与底面$ABCD$所成的角为$\angle A_1AH$，由$\cos\angle A_1AH=\frac{AH}{AA_1}=\frac{1}{2}$，所以$\angle A_1AH=60^\circ$，B 正确.

$A_1C=\sqrt{CH^2+A_1H^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{14}$，C 错误

设以 A_1 为球心，且表面积为 6π 的球的半径为 R，则 $4\pi R^2=6\pi$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}=A_1H$，

所以以 A_1 为球心，且表面积为 6π 的球与底面 $ABCD$ 相切，D 正确.



故选：BD.

11．已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，直线 l：$y=kx+m\left(k\neq\pm2\right)$ 与双曲线有唯一的公共点 M，过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴、y 轴于 $A\left(x_0,0\right)$，$B\left(0,y_0\right)$ 两点. 当点 M 变化时，点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 之变化. 则下列结论中正确的是（　　）

A．$k^2=m^2+4$

B．$y_0=\frac{k}{2}x_0$

C．P 点坐标可以是 $\left(7,\sqrt{6}\right)$

D．$\frac{1}{{x_0}^2}-\frac{1}{{y_0}^2}$ 有最大值 $\frac{1}{25}$

【答案】ACD

【解析】对于 A，联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 消 y 可得 $\left(4-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-4=0$，

直线与双曲线只有一个公共点，且 $k\neq\pm2$，则 $\Delta=0$，

$\therefore 4k^2m^2-4\left(4-k^2\right)\left(-m^2-4\right)=0$，$\therefore k^2=m^2+4$，即选项 A 正确；

对于 B，由方程可得 $x_M=-\frac{k}{m}$，则 $y_M=-\frac{k^2}{m}+m=\frac{m^2-k^2}{m}=\frac{-4}{m}$，$\therefore M\left(-\frac{k}{m},-\frac{4}{m}\right)$，

则 AB 的直线方程为 $y+\frac{4}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{m}\right)$，令 $y=0$，$x_0=-\frac{5k}{m}$，

令 $x=0$，$y_0=-\frac{5}{m}$，所以 $y_0=kx_0$，即 B 错误；

对于 C，则易知 $P\left(-\frac{5k}{m},-\frac{5}{m}\right)$，若 $-\frac{5}{m}=\sqrt{6}$，则 $m=-\frac{5}{\sqrt{6}}$，

$k^2=\frac{25}{6}+4=\frac{49}{6}$，取 $k=\frac{7}{\sqrt{6}}$，$-\frac{5k}{m}=-5\times\frac{\frac{7}{\sqrt{6}}}{-\frac{5}{\sqrt{6}}}=7$，即 $P\left(7,\sqrt{6}\right)$，所以 C 正确；

对于 D，可得 $\frac{1}{x_0^2}-\frac{1}{y_0^2}=\frac{m^2}{25k^2}-\frac{m^2}{25}=\frac{m^2-m^2k^2}{25k^2}=\frac{\left(k^2-4\right)\left(1-k^2\right)}{25k^2}=\frac{-k^4+5k^2-4}{25k^2}$

$=-\left(\frac{k^2}{25}+\frac{4}{25k^2}\right)+\frac{1}{5}\le -2\sqrt{\frac{4}{25\times 25}}+\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$，当且仅当 $k=\pm\sqrt{2}$ 时，等号成立，即 D 正确；

故选：ACD

12．已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 R，它们的导函数分别为 $f'(x)$，$g'(x)$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=3$，若 $g(x+2)$ 是偶函数，则下列正确的是（　　）.

A. $g'(2)=0$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 4

C. $f(x+1)$ 是奇函数

D. $g(2)=5$，则 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=2024$

【答案】ABD

【解析】A 选项，$g(x+2)$ 为偶函数，故 $g(-x+2)=g(x+2)$，

两边求导得，$-g'(-x+2)=g'(x+2)$，

令 $x=0$ 得 $-g'(2)=g'(2)$，解得 $g'(2)=0$，A 正确；

B 选项，因为 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(-x+2)=g(x+2)$，

所以 $f(x)+g(x+2)=5$ ①，

因为 $g(x)-f(x-4)=3$，所以 $g(x+2)-f(x-2)=3$ ②，

则①②相减得，$f(x)+f(x-2)=2$ ③，

又 $f(x-2)+f(x-4)=2$ ④，

则③④相减得 $f(x)-f(x-4)=0$，即 $f(x)=f(x-4)$，

又 $f(x)\ne f(x-2)$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 4，B 正确；

C 选项，假如 $f(x+1)$ 为奇函数，则 $f(-x+1)+f(x+1)=0$，

当 $x=1$ 时，可得 $f(0)+f(2)=0$，

但 $f(x)+f(x-2)=2$，当 $x=2$ 可得 $f(2)+f(0)=2$，

显然不满足要求，故 $f(x+1)$ 不是奇函数，C 错误；

D 选项，因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(0)+g(2)=5$，

又 $g(2)=5$，故 $f(0)=0$，

由 B 选项得 $f(x)+f(x-2)=2$，故 $f(2)+f(0)=2$，解得 $f(2)=2$，

且 $f(3)+f(1)=2$，

由 B 选项知 $f(x)$ 的一个周期为 4，故 $f(4)=f(0)=0$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，

则 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=506\times4=2024$，D 正确.

故选：ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．二项式 $(x-2)(1+x)^n$ 的展开式中，所有项系数和为 -256，则 x^2 的系数为______（用数字作答）.

【答案】-48

【解析】令 $x=1$ 可得二项式 $(x-2)(1+x)^n$ 的所有项系数和为 $-2^n=-256$，所以 $n=8$.

二项式 $(1+x)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot x^r$， $r=0$，1，…，8，

所以 $(x-2)(1+x)^n$ 的展开式中， x^2 的系数为 $C_8^1-2C_8^2=-48$.

故答案为： -48

14. 随机变量 ξ 有 3 个不同的取值，且其分布列如下：

ξ	$4\sin\alpha$	$4\cos\alpha$	$2\sin2\alpha$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	a

则 $E(\xi)$ 的最小值为______.

【答案】$-\frac{5}{4}$

【解析】依题意知 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a=1$， 则 $a=\frac{1}{2}$， 则 $E(\xi)=\sin\alpha+\cos\alpha+\sin2\alpha$，

设 $t=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$， 则 $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

故 $\sin2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=t^2-1$， 所以 $E(\xi)=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，

当 $t=-\frac{1}{2}\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$时， $E(\xi)$ 取最小值 $-\frac{5}{4}$，

故答案为： $-\frac{5}{4}$

15. 已知数列 $\{a_n\}$满足 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot2^n$， 记数列 $\{a_n-tn\}$的前 n 项和为 S_n， 若 $S_n\le S_{10}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是______________.

【答案】$\left[\frac{12}{11},\frac{11}{10}\right]$

【解析】由 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot2^n$，

当 $n=1$ 时， $a_1=2$，

当 $n\ge2$ 时，由 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot2^n$ 得 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot2^{n-1}$，

两式相减并化简得 $a_n=n+1(n\ge2)$，

a_1 也符合上式，所以 $a_n = n+1$，

令 $b_n = a_n - tn = n+1-tn = (1-t)n+1$，

$b_{n+1} - b_n = (1-t)(n+1)+1-[(1-t)n+1] = 1-t$ 为常数，

所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，首项 $b_1 = 2-t$，

所以 $S_n = \dfrac{2-t+(1-t)n+1}{2} \times n = \dfrac{1-t}{2}n^2 + \dfrac{3-t}{2}n$，

对称轴为 $n = -\dfrac{\frac{3-t}{2}}{1-t} = -\dfrac{3-t}{2-2t}$，

由于 $S_n \le S_{10}$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，

所以 $\begin{cases} \dfrac{1-t}{2} < 0 \\ 9.5 \le -\dfrac{3-t}{2-2t} \le 10.5 \end{cases}$，解得 $\dfrac{12}{11} \le t \le \dfrac{11}{10}$，

所以 t 的取值范围是 $\left[\dfrac{12}{11}, \dfrac{11}{10}\right]$.

故答案为：$\left[\dfrac{12}{11}, \dfrac{11}{10}\right]$

16．已知正实数 x，y 满足 $ye^x = \ln x - \ln y$，则 $\dfrac{e^x}{x} + \ln y$ 的最小值为______.

【答案】$e-1$##$-1+e$

【解析】由 $ye^x = \ln x - \ln y$ 得 $ye^x = \ln\dfrac{x}{y}$，即 $xe^x = \dfrac{x}{y}\ln\dfrac{x}{y} = \ln\dfrac{x}{y} \cdot e^{\ln\frac{x}{y}}$，

设 $f(t) = te^t$，则 $f(x) = f\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$，$f'(t) = e^t(t+1)$，

当 $t > -1$ 时，$f'(t) > 0$，所以 $f(t)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 x，y 均为正实数，所以 $ye^x = \ln\dfrac{x}{y} > 0$，

由 $f(x) = f\left(\ln\dfrac{x}{y}\right)$，可得 $x = \ln\dfrac{x}{y}$，即 $y = \dfrac{x}{e^x}(x > 0)$.

由 $y' = \dfrac{1-x}{e^x}$ 知，当 $0 < x < 1$ 时，$y' > 0$，$y = \dfrac{x}{e^x}$ 单调递增，

当 $x > 1$ 时，$y' < 0$，$y = \dfrac{x}{e^x}$ 单调递减，所以 $y = \dfrac{x}{e^x} \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right]$.

则 $\dfrac{e^x}{x} + \ln y = \dfrac{1}{y} + \ln y, 0 < y \le \dfrac{1}{e}$. 令 $g(u) = \dfrac{1}{u} + \ln u, 0 < u \le \dfrac{1}{e}$，

则 $g'(u)=-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}=\frac{u-1}{u^2}<0$，所以 $g(u)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 上单调递减，

所以 $g(u)_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=e-1$，所以 $\frac{1}{y}+\ln y\ge e-1$，即 $\frac{e^x}{x}+\ln y$ 的最小值为 $e-1$.

故答案为：$e-1$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\left(\sin C-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\right)\sin C.$$

（1）求 C；

（2）若 $c=2\sqrt{13}$，$a=3b$，点 D 在边 AB 上，且 $\angle ACD=\angle BCD$，求 CD 的长.

【答案】（1）$\frac{2\pi}{3}$　　（2）$\frac{3}{2}$

【解析】（1）由已知借助正弦定理可得：

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\left(\sin C-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\right)\sin C\Rightarrow a^2+b^2=c^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C,$$

即 $2ab\cos C=-\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$，即 $\tan C=-\sqrt{3}$，

$C\in(0,\pi)$，故 $C=\frac{2\pi}{3}$；

（2）由余弦定理知 $b^2+9b^2-52=2b\cdot 3b\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$，$\therefore b=2$，

由 $S_{\triangle CBD}+S_{\triangle CAD}=S_{\triangle ABC}$ 知，$\frac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}3b\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}b\cdot 3b\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$，

即 $CD=\frac{3}{4}b=\frac{3}{2}$.

18．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，$a_1=1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}2^{a_n}, n\text{为偶数}\\ \frac{a_n+2}{a_n}+\frac{a_n}{a_n+2}-2, n\text{为奇数}\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

【答案】（1）$a_n=n$　（2）$\frac{4^{n+1}-4}{3}+\frac{4n}{2n+1}$

【解析】（1）因为 $S_n=\frac{n+1}{2}a_n$，

$n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{n}{2}a_{n-1}$，

两式相减得$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，

$\dfrac{a_2}{a_1}=2$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{3}{2}$，$\cdots$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，

相乘得$\dfrac{a_n}{a_1}=n$，所以$a_n=n(n\ge 2)$，

当$n=1$时符合上式，

所以$a_n=n$；

（2）$b_n=\begin{cases}2^n,n\text{为偶数}\\ \dfrac{n+2}{n}+\dfrac{n}{n+2}-2,n\text{为奇数}\end{cases}$，

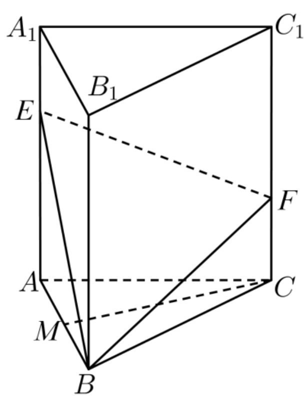
当n为奇数时$b_n=1+\dfrac{2}{n}+1-\dfrac{2}{n+2}-2=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

$T_{2n}=2^2+2^4+\cdots+2^{2n}+2\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}+\dfrac{4n}{2n+1}$

$=\dfrac{4^{n+1}-4}{3}+\dfrac{4n}{2n+1}$.

19．如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$CA=CB$，E，F分别是棱AA_1,CC_1上的点，平面$BEF\perp$平面ABB_1A_1，M是AB的中点．



（1）证明：$CM//$平面BEF；

（2）若$AC=AE=2$，求平面BEF与平面ABC所成锐二面角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析　（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

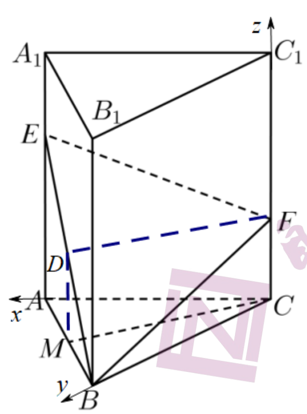
【解析】（1）过F作$FD\perp EB$交BE于D，因为平面$BEF\perp$平面ABB_1A_1，

平面$BEF\cap$平面$ABB_1A_1=BE$，

$FD\subset$平面BEF，则$FD\perp BE$，

$\therefore FD\perp$平面ABB_1A_1，

$\because M$ 为中点，且 $CA=CB$， $\therefore CM\perp AB$，
又 $AA_1\perp$ 平面 ABC， $CM\subset$ 平面 ABC，
$\therefore AA_1\perp CM$， 又 $AB,AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，
$AB\cap AA_1=A$， $\therefore CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，
$\therefore CM//FD$， $CM\not\subset$ 平面 BEF， $FD\subset$ 平面 BEF，
$\therefore CM//$ 平面 BEF.
（2）$\because CM//DF$，
$\therefore$ 可确定一平面 $CMDF$，
$\because CF//AA_1$， $CF\not\subset$ 平面 ABB_1A_1， $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1
$\therefore CF//$ 平面 ABB_1A_1， $CF\subset$ 平面 $CMDF$，
平面 $CMDF\cap$ 平面 $ABB_1A_1=MD$，
$\therefore CF//MD$，
$\therefore$ 四边形 $CMDF$ 为平行四边形，
$\therefore CF=MD=\dfrac{AE}{2}=1$
以 CA,CB,CC_1 为 x，y，z 轴建系，
则 $B(0,2,0),E(2,0,2),F(0,0,1)$，
设 $\vec{m}=(x,y,z)$ 为平面 BEF 的法向量，
$\overrightarrow{EF}=(-2,0,-1),\overrightarrow{BF}=(0,-2,1)$，
则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}2x+z=0\\ 2y-z=0\end{cases}$， 令 $x=1$， 则 $y=-1,z=-2$，
$\therefore \vec{m}=(1,-1,-2)$ 是平面 BEF 的一个法向量，
$\vec{n}=(0,0,1)$ 为平面 ABC 的一个法向量，
$\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
平面 BEF 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.



20．在一个抽奖游戏中，主持人从编号为1,2,3,4的四个外观相同的空箱子中随机选择一个，放入一件奖品，再将四个箱子关闭. 主持人知道奖品在哪个箱子里. 游戏规则是主持人请抽奖人在这四

个箱子中选择一个，若奖品在此箱子里，则奖品由获奖人获得. 现有抽奖人甲选择了 2 号箱，在打开 2 号箱之前，主持人先打开了另外三个箱子中的一个空箱子. 按游戏规则，主持人将随机打开甲的选择之外的一个空箱子.

（1）计算主持人打开 4 号箱的概率；

（2）当主持人打开 4 号箱后，现在给抽奖人甲一次重新选择的机会，请问他是坚持选 2 号箱，还是改选 1 号或 3 号箱？（以获得奖品的概率最大为决策依据）

【答案】（1）$\frac{1}{3}$　　（2）甲应该改选 1 号或 3 号箱.

【解析】（1）设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示 1，2，3，4 号箱子里有奖品，

设 B_1,B_2,B_3,B_4 分别表示主持人打开 $1,2,3,4$ 号箱子，

则 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$，且 A_1,A_2,A_3,A_4 两两互斥.

由题意可知，事件 A_1,A_2,A_3,A_4 的概率都是 $\frac{1}{4}$，$P\left(B_4|\ A_1\right)=\frac{1}{2}$，$P\left(B_4|\ A_2\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(B_4|\ A_3\right)=\frac{1}{2}$，$P\left(B_4|\ A_4\right)=0$.

由全概率公式，得 $P\left(B_4\right)=\sum_{i=1}^{4}P\left(A_i\right)P\left(B_4|\ A_i\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$.

（2）在主持人打开 4 号箱的条件下，1 号箱、2 号箱、3 号箱里有奖品的条件概率分别为

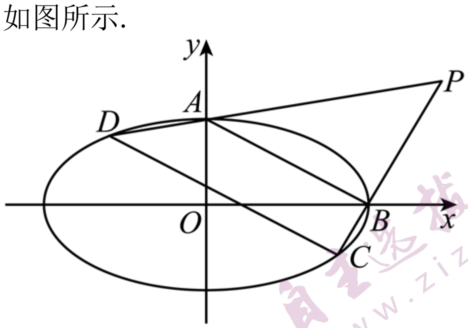
$$P\left(A_1|\ B_4\right)=\frac{P\left(A_1B_4\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B_4|\ A_1\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{3}{8},$$

$$P\left(A_2|\ B_4\right)=\frac{P\left(A_2B_4\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{P\left(A_2\right)P\left(B_4|\ A_2\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{1}{4},$$

$$P\left(A_3|\ B_4\right)=\frac{P\left(A_3B_4\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{P\left(A_3\right)P\left(B_4|\ A_3\right)}{P\left(B_4\right)}=\frac{3}{8},$$

通过概率大小比较，甲应该改选 1 号或 3 号箱.

21．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，椭圆上有四个动点 A，B，C，D，$CD//AB$，AD 与 BC 相交于 P 点. 如图所示.



（1）当 A，B 恰好分别为椭圆的上顶点和右顶点时，试探究：直线 AD 与 BC 的斜率之积是否为定值？若为定值，请求出该定值；否则，请说明理由；

（2）若点 P 的坐标为 $(8,6)$，求直线 AB 的斜率.

【答案】（1）是定值，定值为 $\frac{1}{4}$　　（2）$-\frac{1}{3}$

【解析】（1） 由题意知，$a=4$，$b=2$，所以 $A(0,2)$，$B\left(4,0\right)$，所以 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，

设直线 CD 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+t\left(t\neq 2\right)$，设 $D\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，

联立直线 CD 与椭圆的方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=-\frac{1}{2}x+t\end{cases}$，整理得 $x^2-2tx+2t^2-8=0$，

由 $\Delta=4t^2-4\left(2t^2-8\right)>0$，解得 $-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$，且 $t\neq 2$，

则 $x_1+x_2=2t$，$x_1x_2=2t^2-8$，

所以 $k_{AD}k_{BC}=\frac{\left(y_1-2\right)y_2}{x_1\left(x_2-4\right)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}x_1+t-2\right)\left(-\frac{1}{2}x_2+t\right)}{x_1x_2-4x_1}$

$=\frac{\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{2}t(x_1+x_2)+t^2+x_2-2t}{x_1x_2-4x_1}$

$=\frac{\frac{t^2-4}{2}+x_2-2t}{x_1x_2-4x_1}=\frac{\frac{t^2-4}{2}+2t-x_1-2t}{x_1x_2-4x_1}$

$=\frac{\frac{t^2-4}{2}-x_1}{2t^2-8-4x_1}=\frac{1}{4}$，

故直线 AD 与 BC 的斜率之积是定值，且定值为 $\frac{1}{4}$.

（2）设 $A\left(x_3,y_3\right)$，$B\left(x_4,y_4\right)$，$D\left(x,y\right)$，记 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{DA}$（$\lambda\neq 0$），

得 $\begin{cases}x-8=\lambda x_3-\lambda x\\ y-6=\lambda y_3-\lambda y\end{cases}$. 所以 $\begin{cases}x=\frac{\lambda x_3+8}{1+\lambda}\\ y=\frac{\lambda y_3+6}{1+\lambda}\end{cases}$.

又 A，D 均在椭圆上，所以 $\begin{cases}\frac{x_3^2}{16}+\frac{y_3^2}{4}=1\\ \frac{\left(\frac{\lambda x_3+8}{1+\lambda}\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{\lambda y_3+6}{1+\lambda}\right)^2}{4}=1\end{cases}$，

化简得 $\lambda x_3+3\lambda y_3+12-2\lambda=0$，

因为 $CD\parallel AB$，所以 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，

同理可得 $\lambda x_4+3\lambda y_4+12-2\lambda=0$，

即直线 AB：$\lambda x+3\lambda y+12-2\lambda=0$，

所以 AB 的斜率为$-\frac{1}{3}$.

22．已知函数$f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)$，$g\left(x\right)=ax^2+x$.

（1）当$a=1$时，求证：$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$；

（2）当$x>-1$时，$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$恒成立，求实数$a$的取值范围；

（3）已知$n\in N^+$，证明：$\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln 2$.

【答案】（1）证明见解析　　（2）$a\ge 0$　　（3）证明见解析

【解析】（1）当$a=1$时，$\because y=g\left(x\right)-f\left(x\right)=x^2+x-\ln\left(x+1\right)$，

$\therefore y'=2x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+3x}{x+1}$，

令$y'=0$得$x=0$，或$x=-\frac{3}{2}$（舍）

当$x\in\left(-1,0\right)$，$y'<0$，y单调递减；

当$x\in\left(0,+\infty\right)$，$y'>0$，$y$单调递增

$\therefore$当$x=0$时，$y_{\min}=0$

即$g\left(x\right)-f\left(x\right)\ge 0$，$\therefore g(x)\ge f(x)$

（2）令$h\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-x$（$x>-1$），则$h'\left(x\right)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}$.

当$-1<x<0$时，$h'\left(x\right)>0$，则函数$h\left(x\right)$在$\left(-1,0\right)$上单调递增，

当$x>0$时，$h'\left(x\right)<0$，则函数$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，

所以，$h\left(x\right)_{\max}=h\left(0\right)=0$，即$\ln\left(x+1\right)\le x$，

所以，当$a\ge 0$时，$\ln\left(x+1\right)\le x\le ax^2+x$，即$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$，

当$a<0$时，取$x_0=-\frac{1}{a}>0$，由于$f(x_0)=\ln\left(1+x_0\right)>\ln 1=0$，

而$g(x_0)=ax_0^2+x_0=a\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)^2-\frac{1}{a}=0$，得$\ln\left(x_0+1\right)>ax_0^2+x_0$，

故$f\left(x_0\right)>g\left(x_0\right)$，不合乎题意.

综上所述，$a\ge 0$.

（3）当$a=0$时，

由（1）可得$\ln\left(x+1\right)\le x$，则$\ln x\le x-1$，

可得$\ln\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}-1$，即$-\ln x\le\frac{1}{x}-1$，即$\ln x\ge 1-\frac{1}{x}$（$x>1$），

令$\frac{1}{t}=1-\frac{1}{x}$，所以，$x=\frac{t}{t-1}$，

所以，$\ln\frac{t}{t-1}\ge\frac{1}{t}$，即$\ln t-\ln\left(t-1\right)\geqslant\frac{1}{t}$（$t>1$），

所以，$\frac{1}{n+k} \le \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$，$k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$，

令 $g(x) = x - \sin x$（$x > 0$），则 $g'(x) = 1 - \cos x \ge 0$，且 $g'(x)$ 不恒为零，

所以，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x) > g(0) = 0$，则 $\sin x < x$（$x > 0$），

所以，$\sin\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n+k} \le \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$，$k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$，

所以，$\sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}$

$< [\ln(n+1) - \ln n] + [\ln(n+2) - \ln(n+1)] + \cdots + [\ln(2n) - \ln(2n-1)]$

$= \ln 2n - \ln n = \ln\frac{2n}{n} = \ln 2$.