2024 年邵阳市高三第一次联考试题参考答案与评分标准

数　学(副卷)

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	D	A	D	B	C	D

7. C　**解析:** 由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 3x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 得 $\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}, k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right], k\in\mathbf{Z}$.

$\because f(x)$ 在 $\left[0,\frac{17}{72}a\right]$ 上递增, $\therefore 0<\frac{17}{72}a\leqslant\frac{\pi}{9}$, $\therefore 0<a\leqslant\frac{8\pi}{17}$.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 3x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi, k\in\mathbf{Z}$, 得 $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{4}{9}\pi, k\in\mathbf{Z}$, $\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $\left[\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{9},\frac{2k\pi}{3}+\frac{4}{9}\pi\right], k\in\mathbf{Z}$. $\therefore \frac{7\pi}{9}\leqslant\frac{17}{9}a<\frac{10}{9}\pi$, $\therefore \frac{7\pi}{17}\leqslant a\leqslant\frac{10}{17}\pi$.

综上, $\frac{7\pi}{17}\leqslant a\leqslant\frac{8\pi}{17}$.

8. D　**解析:** $\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{8}e^{\frac{1}{7}}}{\frac{1}{7}e^{\frac{1}{8}}}=\frac{\frac{e^{\frac{1}{7}}}{\frac{1}{7}}}{\frac{e^{\frac{1}{8}}}{\frac{1}{8}}}$, 设 $f(x)=\frac{e^x}{x}$, $0<x<1$, $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $\therefore f'(x)<0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 又 $\frac{1}{7}>\frac{1}{8}$, $\therefore f\left(\frac{1}{7}\right)<f\left(\frac{1}{8}\right)$, $\therefore a<b$. 又 $a-c=\frac{1}{8}\left(e^{\frac{1}{7}}-\frac{e}{7}\right)$,

设 $g(x)=e^x-ex$, $g'(x)=e^x-e$, $x<1$ 时, $g'(x)<0$, $\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递减.

$\therefore g\left(\frac{1}{7}\right)>g(1)=0$, $\therefore a>c$. 综上 $c<a<b$.

二、多选题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

题号	9	10	11	12
答案	AD	BCD	BC	ACD

11. BC　**解析:** A 错. B. $\because C_1D_1\perp$ 平面 AA_1D_1D, $\therefore C_1D_1\perp DE$. 又 $DE\perp D_1E$, $\therefore DE\perp$ 平面

D_1C_1E,B 对. $C.\because A_1B_1//CD,\therefore A_1B_1//$平面 $CDE.\therefore V_{p-CDE}$ 为定值,C 对. $D.$ 设外接球球心为 O,即为对角线 A_1C 中点. O 到平面 DCE 距离为 A_1 到平面 DCE 距离的一半,A_1 到平面 CDE 距离为$\sqrt{2}$,O 到平面 CDE 距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,正四棱柱外接球半径为$\sqrt{6}$,$\therefore$ 截面圆半径 $r=\sqrt{6-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$,$\therefore S=\pi r^2=\dfrac{11\pi}{2}$. $\therefore$ D 错.

12. ACD　**解析:**因为 $f(x-1)$ 为奇函数,所以 $f(x-1)=-f(-x-1)$,所以 $f'(x-1)=f'(-x-1)$,即 $g(x-1)=g(-x-1)$,所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称. 因为 $g(2x+1)$ 为奇函数,所以函数 $g(x)$ 的图象关于点$(1,0)$对称,所以 8 是函数 $g(x)$ 的一个周期. 因为 $g(0)=\dfrac{1}{3}$,所以 $g(2)=-\dfrac{1}{3}$,$g(4)=-\dfrac{1}{3}$,$g(6)=\dfrac{1}{3}$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{12}kg(2k)=(-1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+11+12)\times\dfrac{1}{3}=4$. 故选 ACD.

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 25　　14. 9　　15. 1　　16. $\dfrac{7}{8}$

15. 1　**解析:**$\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta\cos2\theta\cos4\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{2\sin2\theta\cos2\theta\cos4\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{2\sin4\theta\cos4\theta}{8\sin\theta}=\dfrac{\sin8\theta}{8\sin\theta}=-\dfrac{1}{8}$,所以 $\sin8\theta=-\sin\theta$,即 $\sin\theta+\sin8\theta=0$,　　　;故 $8\theta+(-\theta)=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $8\theta-(-\theta)=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,因为 $0\in\left(\dfrac{\pi}{7},\dfrac{\pi}{4}\right)$,所以 $\theta=\dfrac{2\pi}{9}$,　故 $2\cos^2 4\theta-\cos\theta=$

$2\cos^2\dfrac{8\pi}{9}-\cos\dfrac{2\pi}{9}=\cos\dfrac{16\pi}{9}+1-\cos\dfrac{2\pi}{9}=1.$

16. $\dfrac{7}{8}$　**解析:**设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$,双曲线方程为:$\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$.

不妨设点 P 为第一象限的交点,由题意知:$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a_1,\\|PF_1|-|PF_2|=2a_2.\end{cases}$则$\begin{cases}|PF_1|=a_1+a_2,\\|PF_2|=a_1-a_2.\end{cases}$

由余弦定理得:$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2\Rightarrow4c^2=3a_1^2+a_2^2$.

$\therefore 4=\dfrac{3}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}$.

$$\therefore e_1^2+\frac{1}{12}e_2^2=\left(e_1^2+\frac{1}{12}e_2^2\right)\cdot1=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}\right)\cdot\left(e_1^2+\frac{1}{12}e_2^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{12}+3+\frac{3\times\frac{1}{12}e_2^2}{e_1^2}+\frac{e_1^2}{e_2^2}\right)\geqslant\frac{1}{4}\cdot\left(3+\frac{1}{12}+2\sqrt{\frac{3\times\frac{1}{12}e_2^2}{e_1^2}\cdot\frac{e_1^2}{e_2^2}}\right).$$

当且仅当$\frac{1}{4}e_2^4=e_1^4$时取等号，$\therefore e_1^2=\frac{e_2^2}{2}$.

$\therefore 4=\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{2e_1^2}=\frac{7}{2e_1^2}$，$\therefore e_1^2=\frac{7}{8}$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10 分）

解：(1)不难知，第 1 台加工零件的次品率为 5%，第 2 台加工零件的次品率为 7%.

记事件 A 表示“从混放的零件中任取一个零件，该零件是次品”，

事件 B_1 表示“从混放的零件中任取一个零件，该零件是第 i 台车床加工的”，$i=1,2$.

则 $P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.07}{0.6\times0.05+0.4\times0.07}=\frac{14}{29}$. ………………………………… 5 分

(2)X 的可能取值为 $0,1,2,3,\cdots,10$，且 X 服从二项分布.

由(1)知，$P(A)=0.6\times0.05+0.4\times0.07=0.058$.

$\therefore X\sim B(10,0.058)$. $\quad\therefore E(X)=10\times0.058=0.58$. ………………………………… 10 分

18.（12 分）

解：(1)由已知 $2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=2$，$\therefore \sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)=1$. ………………………………… 2 分

$\because 0<A<\pi$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$.

$\therefore 2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)$\because \overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.

又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|}=\frac{|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{4c^2+2bc+b^2}}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2+\frac{2b}{c}+4}{\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{b}{c}+1}}$. ………………………………… 8 分

令$\frac{b}{c}=t>0$，

$\therefore \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|}=\frac{\sqrt{t^2+2t+4}}{\sqrt{t^2-t+1}}=\sqrt{1+\frac{3(t+1)}{t^2-t+1}}=\sqrt{1+\frac{3(t+1)}{(t+1)^2-3(t+1)+3}}$

$=\sqrt{1+\frac{3}{(t+1)+\frac{3}{t+1}-3}}\leqslant\sqrt{1+\frac{3}{2\sqrt{3}-3}}=\sqrt{2\sqrt{3}+4}=\sqrt{3}+1$. ………………………… 10 分

当且仅当 $t=\sqrt{3}-1$ 取等号.

$\therefore \dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BD}|}$的最大值为$\sqrt{3}+1$. ………………………………………………………… 12 分

19. (12 分)

(1)**证明**:$\because$ 圆台可以看做是由平行于圆锥底面的平面去截圆锥而得到,所以圆台的母线也就是生成这个圆台的圆锥相应母线的一部分.

$\therefore$ 母线 AA_1 与母线 BB_1 的延长线必交于一点,

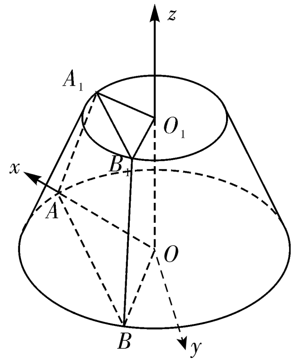
$\therefore A,A_1,B,B_1$四点共面. ……………………………………………………………… 2 分

$\because$ 圆面 O_1//圆面 O,且平面 $ABB_1A_1\cap$圆面 $O_1=A_1B_1$,平面 $ABB_1A_1\cap$圆面 $O=AB$.

$\therefore A_1B_1/\!/AB$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)**解**:$\because \triangle ABO$ 为等边三角形,

$\therefore \angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$,如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$,



设$|OO_1|=t(t>0)$.

$A(3,0,0)$,$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$,$A_1(2,0,t)$.

$\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,t)$,$\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$

设平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$. 则有:

$\begin{cases}-x+tz=0,\\ -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}y=0.\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$,则 $y=1$,$z=\dfrac{\sqrt{3}}{t}$,$\therefore \boldsymbol{n}_1=\left(\sqrt{3},1,\dfrac{\sqrt{3}}{t}\right)$. ……………………… 8 分

底面的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$,

因为截面与下底面所成的夹角大小为 $60°$,

所以 $\cos 60°=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{t\cdot\sqrt{4+\dfrac{3}{t^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4t^2}}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore t=\dfrac{3}{2}$, ……………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore \overrightarrow{AA_1}=\left(-1,0,\dfrac{3}{2}\right)$,又 $\overrightarrow{A_1B_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\therefore B_1$ 坐标为$\left(1,\sqrt{3},\dfrac{3}{2}\right)$.

$\therefore \overrightarrow{O_1B_1}=(1,\sqrt{3},0)$,

$\cos\langle\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{O_1B_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{O_1B_1}}{|\overrightarrow{AA_1}||\overrightarrow{O_1B_1}|}=\dfrac{-1}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}\cdot 2}=\dfrac{-\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore$ 异面直线 AA_1 与 O_1B_1 所成角的余弦是$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. ………………………………… 12 分

20.（12 分）

解：(1) $\because a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}=n^2, n\geqslant 1.$

$\therefore a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}=(n-1)^2, n\geqslant 2.$

$\therefore \frac{a_n}{n}=n^2-(n-1)^2=2n-1.$ 即 $a_n=n(2n-1), n\geqslant 2.$ …………………………………… 2 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，满足上式.

$\therefore a_n=n(2n-1)=2n^2-n, b_n=2^{n-1}.$ …………………………………………………… 4 分

(2) 由(1)知：$\frac{a_nb_n}{n}=(2n-1)\cdot 2^{n-1}.$

$\therefore T_n=1\cdot 2^0+3\cdot 2^1+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1},$ …………………………………………… 5 分

$2T_n=1\cdot 2^1+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-1}+(2n-1)\cdot 2^n.$

$\therefore -T_n=1+2\cdot 2^1+\cdots+2\cdot 2^{n-1}-(2n-1)\cdot 2^n$ ………………………………………… 7 分

$=1+2\cdot\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^n$ ……………………………………………… 9 分

$=1+4(2^{n-1}-1)-(2n-1)\cdot 2^n$

$=2\cdot 2^n-(2n-1)\cdot 2^n-3$

$=(3-2n)\cdot 2^n-3.$ ………………………………………………………………… 11 分

$\therefore T_n=(2n-3)2^n+3.$ ………………………………………………………………………… 12 分

21.（12 分）

解：(1) 依题意得 $\begin{cases}2b=\sqrt{3},\\ a-c=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

解得 $a=1, b=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=\frac{1}{2},$

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为 $x^2+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1.$ ………………………………………………… 4 分

(2) 存在点 P，使 $\angle APE=\angle OPF$，点 P 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},0\right)$. 理由如下：………………… 5 分

$\because$ 直线 l 过点 $(3,0)$，与椭圆 C：$x^2+\frac{4}{3}y^2=1$ 交于不同的两点 E,F. 且都在 x 轴上方.

$\therefore$ 直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的方程为 $y=k(x-3), k\neq 0.$

联立方程 $\begin{cases}y=k(x-3),\\ x^2+\frac{4}{3}y^2=1.\end{cases}$ 消去 y 可得：

$(3+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-3=0.$

设 $E(x_1,y_1)$, $F(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\dfrac{24k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{36k^2-3}{3+4k^2}$. ………………………… 7 分

$\because\ \angle APE=\angle OPF$,

$\therefore\ k_{PE}+k_{PF}=\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=\dfrac{k(x_1-3)(x_2-m)+k(x_2-3)(x_1-m)}{(x_1-m)(x_2-m)}$

$=k\cdot\dfrac{2x_1x_2-(3+m)(x_1+x_2)+6m}{(x_1-m)(x_2-m)}=k\cdot\dfrac{\dfrac{72k^2-6}{3+4k^2}-(3+m)\cdot\dfrac{24k^2}{3+4k^2}+6m}{(x_1-m)(x_2-m)}$

$=k\cdot\dfrac{72k^2-6-72k^2-24mk^2+18m+24mk^2}{(x_1-m)(x_2-m)\cdot(3+4k^2)}=0.$ ………………………… 10 分

$\therefore\ 18m-6=0$, $\therefore\ m=\dfrac{1}{3}$.

存在 P 点满足条件.

$\therefore\ P$ 点坐标为 $\left(\dfrac{1}{3},0\right)$. ………………………………………… 12 分

22.（12 分）

（1）**解**：$f'(x)=\dfrac{a}{x-1}+a+2=\dfrac{(a+2)(x-1)+a}{x-1}=\dfrac{(a+2)x-2}{x-1}$, $x>1$.

当 $a=-2$ 时，$f'(x)=-\dfrac{2}{x-1}<0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{2}{a+2}\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{2}{a+2},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，$(a+2)x>2$, $(a+2)x-2>0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a<-2$ 时，$a+2<0$, $(a+2)x-2<0$, $\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

综上所述，当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{2}{a+2}\right)$ 上单调递减，$\left(\dfrac{2}{a+2},+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a\leqslant-2$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 4 分

（2）**证明**：$a=1$ 时，$F(x)=\ln(x-1)+2\sin(x-1)-x+1$.

令 $h(x)=\ln x+2\sin x-x\ (x>0)$,

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+2\cos x-1$.

令 $h'(x)=m(x)$, $m'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-2\sin x$.

ⅰ. $x\in(0,1]$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增.

又 $h(1)=2\sin1-1>0$,

$g(e^{-2})=-2+2\sin e^{-2}-e^{-2}<0$

$\therefore$ 存在一个零点 x_1, $x_1\in(0,1]$, 使 $h(x_1)=0$. ………………………………… 6 分

ⅱ. $x\in(1,\pi]$,

$m'(x)=-\frac{1}{x^2}-2\sin x<0$ 恒成立,

$\therefore m(x)$ 在 $(1,\pi]$ 上单调递减.

又 $m(\pi)=\frac{1}{\pi}-2-1<0$,

$m(1)=2\cos 1>0$.

存在零点 x_0,使 $m(x_0)=0$.

$\therefore x\in(1,x_0)$,$h'(x)>0$,

$x\in(x_0,\pi)$,$h'(x)<0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增,(x_0,π) 上单调递减.

又 $h(1)>0$,$\therefore h(x_0)>0$.

$h(\pi)=\ln\pi-\pi<0$,

$\therefore$ 存在一个零点 x_2,$x_2\in(x_0,\pi)$,使 $h(x_2)=0$. ………………………………………… 8 分

ⅲ. $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$,

$\therefore h'(x)=\frac{1}{x}-1+2\cos x<0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ 单调递减.

$\therefore h(x)<h(\pi)=\ln\pi-\pi<0$ 恒成立.

$\therefore h(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ 没有零点. ………………………………………………………… 10 分

ⅳ. $x\in\left(\frac{3\pi}{2},+\infty\right)$ 时,$\ln x+2\sin x-x\leqslant\ln x+2-x$

下面来证明当 $x\in\left(\frac{3\pi}{2},+\infty\right)$ 时,$\ln x+2-x<0$.

设 $n(x)=x-2-\ln x$.

$n'(x)=1-\frac{1}{x}>0$.

$\therefore n(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

$n(x)\geqslant n\left(\frac{3\pi}{2}\right)$,$\frac{3\pi}{2}-2-\ln\frac{3\pi}{2}>2-\ln\frac{3\pi}{2}>0$,

$\therefore \ln x+2-x<0$ 恒成立.

综上所述,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有两个零点.

又 $F(x)$ 是由 $h(x)$ 向右平移一个单位所得,

$\therefore F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 只有两个零点. ………………………………………………………… 12 分

注:解答题有其他解法酌情给分.