

座位号  
考号  
姓名  
班级  
学校

答题线内不要密封

## 2024年全国高考·仿真模拟卷(三)

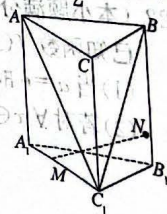
# 数 学

### 注意事项:

1. 本试卷满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置。
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效。
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{0, 2, 4\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ,  $C = \{ab | a \in A, b \in B\}$ , 则集合  $C$  的子集个数为  
A. 31                      B. 32                      C. 63                      D. 64
2. “ $a > b$ ”是“ $a > |b| + 1$ ”的  
A. 必要不充分条件                      B. 充分不必要条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
3. 若直线  $2x + y + 3 = 0$  被圆  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + a = 0$  所截得的弦长为  $2\sqrt{2}$ , 则  $a =$   
A.  $-\frac{38}{5}$                       B.  $\frac{38}{5}$                       C.  $-\frac{4}{5}$                       D.  $\frac{4}{5}$
4. 已知  $\theta$  为锐角, 且  $\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 则  $\tan(\theta + \frac{\pi}{6}) =$   
A.  $-\frac{2}{3}$                       B.  $-\frac{4}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{4}{3}$
5. 已知平面向量  $a, b$  满足  $|a| = 3, |b| = 1, (a - b) \cdot (2a + b) = 15$ , 则  $a + 3b$  在  $b$  上的投影向量为  
A.  $-3b$                       B.  $3b$                       C.  $-5b$                       D.  $5b$
6. 党的二十届二中全会指出:大兴调查研究之风,大力弘扬求真务实、真抓实干的作风。为响应中央号召,某高校在暑假社会实践期间安排5名同学到3个乡镇进行调研,要求每个乡镇至少安排1人,则这5名同学全部被安排的不同方案种数为  
A. 120                      B. 150                      C. 180                      D. 210
7. 如图,正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为  $\frac{9}{4}$ , 底面边长为  $\sqrt{3}$ ,  $M$  为  $A_1C_1$  上一点, 且  $A_1M = \frac{1}{2}MC_1$ ,  $N$  为侧面  $BCC_1B_1$  上的一点,  $MN \parallel$  平面  $ABC_1$ , 则点  $N$  的轨迹长度为  
A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       B.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$   
C.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$                       D.  $\frac{2\sqrt{15}}{3}$



8. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_1=1, S_n=a_{n+1}-a_1$ , 若  $b_n=\frac{(2n-1)^2}{a_n}$ , 则数列  $\{b_n\}$  的最大项为

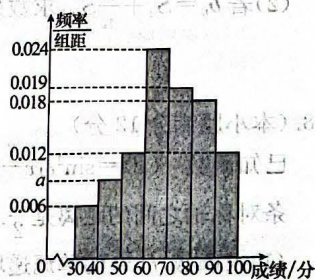
- A.  $\frac{9}{2}$                       B.  $\frac{16}{3}$                       C.  $\frac{25}{4}$                       D.  $\frac{33}{5}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $i$  为虚数单位, 复数  $z=\frac{2}{i(3+i^3)}$ , 下列说法正确的是

- A.  $|\bar{z}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$                       B. 复数  $z$  在复平面内对应的点位于第四象限  
C.  $\frac{3}{5}i-\bar{z}<0$                       D.  $z+\frac{1}{5}$  为纯虚数

10. 某学校从参加“迎亚运文明礼仪竞赛”的学生中抽出  $N$  名学生, 统计了他们的成绩(成绩均为整数且满分为 100 分)作为样本, 得到如图所示的频率分布直方图. 已知成绩在区间  $[80, 90)$  内的学生人数为 18, 则



- A.  $a=0.008$   
B.  $N=100$   
C. 这  $N$  名学生成绩的 80% 分位数约为 86 分  
D. 从成绩低于 70 分的学生中用分层抽样的方法随机抽取 17 人座谈, 则应选取成绩在  $[50, 60)$  的学生 4 人

11. 已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的左、右焦点, 且  $M(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$  为双曲线上一点,  $C$  的焦点  $F_1$  到一条渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ , 点  $P$  是双曲线  $C$  上一点. 则下列说法正确的是

- A. 双曲线的标准方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$   
B. 双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}x$   
C. 若  $|OP| = \sqrt{10}$ , 则  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
D. 若  $P$  在双曲线右支上, 且  $|PF_1| = 3|PF_2|$ , 则  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2}$

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x \ln x - 2x + 3, & x > 0 \\ |\ln(-x)|, & x < 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $f(x) - m = 0$  有四个不等实根  $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ , 则下列结论正确的是

- A.  $3 - e < m < 3$                       B.  $x_1x_2 = 1$                       C.  $x_3x_4 < e^2$                       D.  $3x_1 + x_2 < \frac{1}{e^3} - 3e^3$

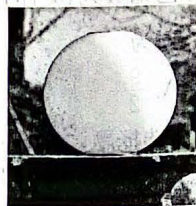
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 写出一个以原点为对称中心, 焦点在  $y$  轴上, 且离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  的椭圆的标准方程 \_\_\_\_\_.

14. 某知识竞赛考试共有 6 道多选题, 若全部选对的得 5 分, 若有选错的得 0 分, 若部分选对的得 2 分. 小明每道题全部选对、有选错的、部分选对的概率分别为 0.2, 0.3, 0.5, 且每道题的作答情况相互独立. 则小明得到 16 分的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 对任意  $x, y \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$  成立, 且  $g(x) = f(x) + 2024$ , 若  $g(3) = 2024$ , 则  $g(-3) =$  \_\_\_\_\_.

16. 如图是一个球形围墙灯, 该灯的底座可以近似看作正四棱台. 球形灯与底座刚好相切, 切点为正四棱台上底面中心, 且球形灯内切于底座四棱台的外接球. 若正四棱台的上底面边长为 4, 下底面边长为 2, 侧棱长为  $\sqrt{3}$ , 则球形灯半径  $r$  与正四棱台外接球半径  $R$  的比值为 \_\_\_\_\_.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $a_1 = 1, a_5 = 3a_2$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式及  $S_n$ ;

(2) 若  $b_n = S_n + \frac{2}{n}S_n$ , 求数列  $\{\frac{1}{b_n}\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sin^2 \omega x - 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos(\omega x + \pi) - \cos^2 \omega x (\omega > 0)$ , 且函数  $f(x)$  图象相邻两条对称轴之间的距离是  $\frac{\pi}{2}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调递增区间;

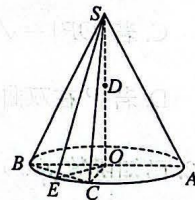
(2)  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 若  $b = 2$ , 且锐角  $B$  满足  $f(B) = 2$ , 求  $\frac{a+3c}{\sin A + 3\sin C}$  的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在圆锥  $SO$  中,  $AB$  是底面圆  $O$  的直径,  $SO = AB = 4$ ,  $C$  为  $\widehat{AB}$  的中点,  $E$  为  $\widehat{BC}$  的中点,  $D$  在线段  $SO$  上运动且不与  $S, O$  重合.

(1) 证明: 平面  $SEO \perp$  平面  $SBC$ ;

(2) 若二面角  $C-AD-O$  的余弦值为  $\frac{3\sqrt{22}}{22}$ , 求  $OD$  的长度.



20. (本小题满分 12 分)

2024 年汤姆斯杯暨尤伯杯赛将在成都举行. 为营造更加良好的环境迎接成都“汤尤杯”, 提升出租车司机的英语口语水平, 某出租车公司对本公司出租车司机进行了“常用英语口语”训练, 并进行简单考核, 经统计得通过考核的人数  $y$ (人) 与训练天数  $x$ (天) 的数据如下表:

$x$ (天)	3	6	9	12	15
$y$ (人)	81	102	126	154	182

通过分析发现通过考核的人数  $y$ (人) 与训练天数  $x$ (天) 呈线性相关.

(1) 求  $y$  关于  $x$  的经验回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  ( $\hat{b}$  的结果四舍五入到 0.01), 并估计经过 30 天训练能通过考核的人数(结果四舍五入到个位);

【24 仿真模拟·数学(三) 第 3 页(共 4 页) X】

N

(2)为研究该公司司机的性别与平均每天口语练习的时间的关系,对该公司 100 名司机平均每天口语练习的时间进行了调查,统计数据如下表:

平均每天口语练习的时间(分钟)	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)	[50,60]
总人数	8	18	21	25	21	7

规定:将平均每天口语练习的时间在[0,40)分钟内的司机评价为“口语练习的时间不达标”,在[40,60]分钟内的司机评价为“口语练习的时间达标”.

请根据上述表格中的统计数据填写下面  $2 \times 2$  列联表,并判断依据小概率值  $\alpha=0.01$  的独立性检验,能否认为性别与口语练习的时间是否达标有关?

	口语练习的时间不达标	口语练习的时间达标	合计
男	42		
女		18	
合计			

参考数据:  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 495$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 6567$ .

参考公式: 回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x},$$

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{其中 } n = a + b + c + d.$$

$\alpha$	0.1	0.01	0.005	0.001
$\chi_{\alpha}^2$	2.706	6.635	7.879	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  与直线  $l: y = 4$  交于  $P, Q$  两点, 且点  $O$  在以  $PQ$  为直径的圆上.

(1) 求抛物线  $C$  的方程;

(2) 直线  $l_1$  过抛物线的焦点, 且与抛物线交于两点  $A, B$ , 是否存在一个半径为  $\frac{3}{2}$  的定圆与以  $AB$  为直径的圆都内切, 若存在, 求出该定圆的方程; 若不存在, 说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = xe^x - a(x + \ln x), a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a = e$  时, 求  $f(x)$  的极值;

(2) 若对  $\forall x \in (0, +\infty), f(x) - 1 \geq 0$  恒成立, 求实数  $a$  的值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

