西南大学附属中学重庆育才中学万州高级中学
高 2024 届拔尖强基联盟高三上十二月联合考试
数学试题

（满分：150 分；考试时间：120 分钟）

注意事项：

1.答题前，考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上.

2.答选择题时，必须使用 2B 铅笔填涂；答非选择题时，必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写；必须在题号对应的答题区域内作答，超出答题区域书写无效；保持答卷清洁、完整.

3.考试结束后，将答题卡交回（试题卷学生保存，以备评讲）.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $z-2z\cdot\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$，则复数 z 的虚部为（　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}\mathrm{i}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{5}\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】设复数 z 的代数形式，代入运算，由复数相等的条件求解方程组即可.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，

代入 $z-2z\cdot\mathrm{i}+\mathrm{i}=0$ 得，

$a+b\mathrm{i}-2(a+b\mathrm{i})\mathrm{i}+\mathrm{i}=a+2b+(b-2a+1)\mathrm{i}=0$，

则有 $\begin{cases}a+2b=0\\b-2a+1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\frac{2}{5}\\b=-\frac{1}{5}\end{cases}$，即复数 z 的虚部为 $-\frac{1}{5}$.

故选：A.

2. 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{y|y=1-2^x,x\in A\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由定义域为A，先求函数$y=1-2^x$值域B即可，再由交集运算可得.

【详解】设函数$f(x)=1-2^x$，

则$f(-1)=\frac{1}{2},f(0)=0,f(1)=-1$，

所以集合$B=\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$，由集合$A=\{-1,0,1\}$，

则$A\cap B=\{-1,0\}$，$A\cap B$中元素的个数为2，

故选：B.

3. 已知$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\beta}$的最小值为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 9　　D. 10

【答案】C

【解析】

【分析】由于$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，得出$\sin^2\alpha$和$\sin^2\beta$的对应关系，再设定$\sin^2\alpha$和$\sin^2\beta$为$x,y$，得到基本不等式形式：“$x+y=1$和$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$模型”，求解即可.

【详解】由于$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，得$\sin\beta=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$，

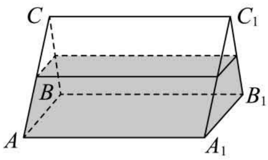
所以设$\sin^2\alpha=x,x\in(0,1)$，$\sin^2\beta=y,y\in(0,1)$，且$x+y=1$，

则$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\beta}=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})(x+y)=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}$，

其中$5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{4x}{y}}=9$（等号成立时$\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即$x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$时成立）.

故选：C.

4. 如图，一个三棱柱形容器中盛有水，侧棱$AA_1=a$，若侧面AA_1B_1B水平放置时，水面恰好过AC，BC，A_1C_1，B_1C_1的中点，那么当底面ABC水平放置时，水面高为（　　）



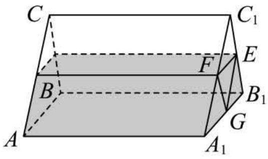
A. $\frac{a}{4}$　　B. $\frac{a}{2}$　　C. $\frac{3a}{4}$　　D. a

【答案】C

【解析】

【分析】利用水的体积不变，转化求解即可.

【详解】如图，



设B_1C_1，A_1C_1，A_1B_1的中点分别为E，F，G，

则$EF = A_1G = GB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$，$S_{\triangle C_1EF} = \frac{1}{4}S_{\triangle A_1B_1C_1}$，

所以水部分四棱柱与原三棱柱的底面面积之比为$3:4$，

由于两种状态下水的体积相等，

所以当底面ABC水平放置时，水面高为侧棱长的$\frac{3}{4}$，即$\frac{3a}{4}$.

故选：C

5. 加强学生心理健康工作已经上升为国家战略，为响应国家号召，W区心理协会派遣具有社会心理工作资格的3位专家去定点帮助5名心理特异学生.若要求每名学生只需一位专家负责，每位专家至多帮助两名学生，则不同的安排方法共有（　　）种

A. 90　　B. 125　　C. 180　　D. 243

【答案】A

【解析】

【分析】根据已知对五位同学分3组，然后全排列即可求解.

【详解】根据题意，具有社会心理工作资格的3位专家去定点帮助5名心理特异学生，

要求每名学生只需一位专家负责，每位专家至多帮助两名学生，

则把五位同学分3组，且三组人数为2、2、1，然后分配给3位专家，

所以不同的安排方法共有$\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3 = 90$种.

故选：A.

6. $[x]$表示不超过x的最大整数，如$[2.3]=2$，$[-1.9]=-2$，已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，

$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，若$b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，则$S_{2023}=$（　）

A. 2023×2022　　B. 2023×2024　　C. 2023×2026　　D. 2023×2028

【答案】B

【解析】

【分析】先根据递推公式变形并构造数列得出a_{n+1}，再适当放缩得出b_n，再结合等差数列的求和公式计算即可.

【详解】由$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$可知$a_{n+2}-4a_{n+1}=a_{n+1}-4a_n$，所以数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$是常数列，

又$a_1=1$，$a_2=5$，所以$a_2-4a_1=1$，则数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$各项均为1，

即$a_{n+1}-4a_n=1\Rightarrow a_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$，$a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，

则数列$\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$是以$\frac{4}{3}$为首项，4为公比的等比数列，

即$a_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\times 4^{n-1}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)=\frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right)$，

由$4\times 2^{2n}-3\times 2^{2n}=2^{2n}>1\Rightarrow \frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right)>2^{2n}$，

$6\times 2^{2n}-4\times 2^{2n}=2^{2n+1}>-1\Rightarrow 3\times 2^{2n+1}>2^{2n+2}-1\Rightarrow 2^{2n+1}>\frac{1}{3}\left(2^{2n+2}-1\right)$，

故$2^{2n}<a_{n+1}<2^{2n+1}\Rightarrow \log_2 a_{n+1}\in(2n,2n+1)$，

根据题意可知：$b_n=[\log_2 a_{n+1}]=2n$，

所以$S_{2023}=\frac{2023(b_1+b_{2023})}{2}=\frac{(2+2\times 2023)\times 2023}{2}=2024\times 2023$.

故选：B

7. 过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点$P(x_0,y_0)$作两渐近线的平行线$PE$，$PF$且与两渐近线交于$E$，$F$两点，且$k_{EF}k_{OP}=1$，则双曲线的离心率为（　）

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】求出E,F的坐标，然后利用斜率之积建立方程，利用离心率公式求解离心率即可.

【详解】过点P与双曲线渐近线$y=\frac{b}{a}x$平行的直线PE为$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$，

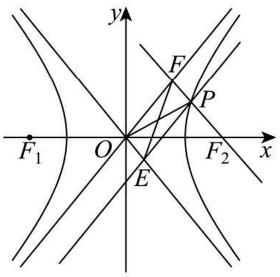
于是有：$\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x \\ y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0) \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{bx_0-ay_0}{2b} \\ y=-\frac{bx_0-ay_0}{2a} \end{cases}$，即$E\left(\frac{bx_0-ay_0}{2b},-\frac{bx_0-ay_0}{2a}\right)$，

过点P与双曲线渐近线$y=-\frac{b}{a}x$平行的直线PF为$y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)$，

于是有：$\begin{cases} y=\frac{b}{a}x \\ y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0) \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{bx_0+ay_0}{2b} \\ y=\frac{bx_0+ay_0}{2a} \end{cases}$，即$F\left(\frac{bx_0+ay_0}{2b},\frac{bx_0+ay_0}{2a}\right)$，

所以$k_{EF}=\dfrac{\frac{bx_0+ay_0}{2a}-\left(-\frac{bx_0-ay_0}{2a}\right)}{\frac{bx_0+ay_0}{2b}-\frac{bx_0-ay_0}{2b}}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，因为$k_{EF}k_{OP}=1$，所以$\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\times\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2}=1$，

所以双曲线的离心率为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.



故选：D

8. 已知$a=\frac{1}{\sin 0.01}+\tan 0.01$，$b=100$，$c=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{10}-23$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】A

【解析】

【分析】由常用不等式与作差法比较大小，

【详解】设$f(x)=x-\sin x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，

则$f'(x)=1-\cos x\ge 0$，则$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递增，

故$f(x)>f(0)$，即$x-\sin x>0$，则$x>\sin x>0$，且$\tan x>0$.

$\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}$，且 $\tan x>0$

所以 $\frac{1}{\sin 0.01}>\frac{1}{0.01}=100, \tan 0.01>0$，

则 $a=\frac{1}{\sin 0.01}+\tan 0.01>100=b$；

因为 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{5}+3}{2},\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{5}+7}{2}$，

则 $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}+7}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{123+55\sqrt{5}}{2}$，

则 $c=\frac{123+55\sqrt{5}}{2}-23=\frac{77+55\sqrt{5}}{2}$，

所以 $b-c=100-\frac{77+55\sqrt{5}}{2}=\frac{123-55\sqrt{5}}{2}$，

由 $123^2=15129,\left(55\sqrt{5}\right)^2=15125$，则 $123>55\sqrt{5}$，即 $b>c$.

所以 $a>b>c$.

故选：A

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+k\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象中相邻两条对称轴的距离是 $\frac{\pi}{2}$，现将 $f(x)$ 的图象向右平移个 $\frac{\pi}{8}$ 单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 是偶函数，且最大值为 2，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期是 2π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$ 对称

D. $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$ 上单调递减

【答案】CD

【解析】

【分析】根据对称性求得周期判断 A，整体代换法求解对称轴、对称中心判断 BC，代入正弦函数单调减区间求解判断 D.

【详解】因为函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+k\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象中相邻两条对称轴的距离是 $\frac{\pi}{2}$，

所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，故A错误；

$f(x)=\sin(2x+\varphi)+k$，将$f(x)$的图象向右平移个$\frac{\pi}{8}$单位长度，得到函数$g(x)$的图象，

则$g(x)=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{4}\right)+k$，又$g(x)$是偶函数，且最大值为2，所以$\begin{cases}\varphi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\\1+k=2\end{cases}$，

即$\begin{cases}\varphi=\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in Z\\k=1\end{cases}$，又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\begin{cases}\varphi=-\frac{\pi}{4}\\k=1\end{cases}$，所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，

由$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

即$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当$x=\frac{\pi}{8}$时，$k=-\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$，故B错误；

由$2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，即$f(x)$图象的对称点为$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},1\right)k\in\mathbf{Z}$，

当$k=1$时，$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{8},1\right)$对称，故C正确；

当$\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得：$\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{7\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以当$k=0$时，$f(x)$在区间$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$上单调递减，故D正确.

故选：CD

10. 对自然人群进行普查，发现患某病的概率$P(C)=0.005$.为简化确诊手段，研究人员设计了一个简化方案，并进行了初步试验研究，该试验具有以下的效果：若以A表示事件"试验反应为阳性"，以C表示事件"被确诊为患病"，则有$P(A|C)=P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$.根据以上信息，下列判断正确的是（　　）

A. $P(\overline{C})=0.95$　　　　B. $P(AC)<0.005$

C. $P(A|\overline{C})=0.05$　　　　D. $P(C|A)=0.1$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据对立事件概率公式判断AC，根据条件概率和全概率公式判断BD.

【详解】因为$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$，所以$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05$，

因为$P(C)=0.005$，所以$P(\overline{C})=0.995$，故选项A错误，C正确；

因为$P(AC)=P(C|A)P(A)=P(A|C)P(C)=0.95\times0.005=0.00475<0.005$，故选项B正确；

由全概率公式可得$P(A)=P(A|C)\cdot P(C)+P(A|\overline{C})\cdot P(\overline{C})$，

则由条件概率公式知$P(C|A)=\dfrac{P(AC)}{P(A)}=\dfrac{P(AC)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$

$=\dfrac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.05\times0.995}=\dfrac{19}{218}$，故选项D错误.

故选：BC

11. 统计学中的标准分z是以平均分$\overline{X}$为参照点，以标准差σ_x为单位，表示一个数据x在整组数据中相对位置的数值，其计算公式是$z_i=\dfrac{x_i-\overline{X}}{\sigma_x}$（$i=1,2,\cdots,n$）.若一组原始数据如下：

序号 (i)	1	2	3	4	5
对应值 (x_i)	10	5	6	6	8

则下列说法正确的是（　　）

A. 该数组的平均值$\overline{X}=7$

B. x_3对应的标准分$z_3>0.1$

C. 该组原始数据的标准分z的方差为1

D. 存在$i\neq j$，使得$x_i>x_j$，$z_i<z_j$同时成立

【答案】AC

【解析】

【分析】根据平均数计算公式判断A，先求标准差σ_x，然后利用标准分计算z_3判断B，计算z_1,z_2,z_3,z_4,z_5，代入方差计算公式求解判断C，利用z_i与x_i关系判断D.

【详解】该数组的平均值$\overline{X}=\dfrac{10+5+6+6+8}{5}=7$，故选项A正确；

因为标准差$\sigma_x=\sqrt{\dfrac{(10-7)^2+(5-7)^2+(6-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

所以$z_3=\dfrac{x_3-\overline{X}}{\sigma_X}=\dfrac{6-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，故选项B错误；

$z_1=\dfrac{x_1-\overline{X}}{\sigma_X}=\dfrac{10-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$，$z_2=\dfrac{x_2-\overline{X}}{\sigma_X}=\dfrac{5-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$z_4=z_3=\dfrac{6-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，

$z_5=\dfrac{x_5-\overline{X}}{\sigma_X}=\dfrac{8-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$，所以标准分 z 的平均值为 $\overline{z}=\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}}{5}=0$，

所以该组原始数据的标准分 z 的方差为

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}-0\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}-0\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}-0\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{4}-0\right)^2}{5}=1,$$

故选项 C 正确；

由题意 $z_i=\dfrac{x_i-7}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}(x_i-7)$，若 $x_i>x_j$，且 $i\neq j$，则 $z_i>z_j$，故选项 D 错误.

故选：AC

12. 定义域为 R 的函数 $f(x)$，$g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$，$g'(x)$，且 $f'(x)=g(x)$，$f'(x)+g'(x)=0$，则下列说法错误的为（　　）

A. 当 x_0 是 $f(x)$ 的零点时，x_0 是 $g(x)$ 的极大值点

B. 当 x_0 是 $f(x)$ 的零点时，x_0 是 $g(x)$ 的极小值点

C. $f(x)$，$g(x)$ 可能有相同的零点

D. $f(x)$，$g(x)$ 可能有相同的极值点

【答案】ABD

【解析】

【分析】结合导数，根据零点和极值点定义逐个判断抽象函数满足的条件即可.

【详解】$g(x)=f'(x)$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $g(x)=h(x)$，

则 $g'(x)=h'(x)$，所以 $f'(x)=-h'(x)$，

AB 选项, 若 $f(x)=0$, 则 x_0 不是 $g(x)$ 的极大值点, 也不是极小值点，故 AB 错误；

C 选项, 考虑 $f(x)=x^3, f'(x)=3x^2$，则 $g(x)=f'(x)=3x^2$，显然两者有共同零点 0，故 C 正确；

D 选项, 若 $g(x)=f'(x)$ 在 x_0 处取得极值,

①若 x_1 处取得极大值，$f'(x_1)>0$，则在 x_1 左右两侧无限小的区间内 $f(x)>0$，

即 $x\in(x_1-|\delta|,x_1+|\delta|),\delta\to 0$ 时，必有 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(x_1-|\delta|,x_1+|\delta|)$ 上单增，不符合题意，

同理 $f'(x_1)\le 0$，有 $x\in(x_1-|\delta|,x_1+|\delta|)\delta\to 0$ 时，必有 $f'(x)\le 0$，所以不符合题意.

②若 x_1 处取得极小值，同理可得也不符合题意，所以 D 选项错误.

故选：ABD.

【点睛】方法点睛：利用导数判断抽象函数零点和极值点的问题，属于中档题.常用方法有：

（1）结合导数得出原函数表达式；

（2）假设成立，判断命题真假；

（3）转化思想应用.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{m}=(-1+a,2-a),\vec{n}=(3-a,4+a)$，若 $(\vec{m}+\vec{n})//\vec{m}$，则实数 $a=$___.

【答案】$\frac{5}{4}$

【解析】

【详解】$m+n=(2,6)$，由 $(m+n)//m$，得 $6(-1+a)-2(2-a)=0$，解得 $a=\frac{5}{4}$.

14. 已知 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$，$\tan 2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，则 $\tan\alpha=$______.

【答案】0

【解析】

【分析】利用同角三角函数的商数关系及正切的二倍角公式计算即可.

【详解】易知 $\tan 2\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，

因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$，

若 $\alpha=0$，显然 $\tan\alpha=0$，上式恒成立，

若 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，则 $\tan\alpha<0$，

所以 $\tan\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow 1=\frac{2}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow\tan^2\alpha=-1$，无解，

综上可知 $\tan\alpha=0$.

故答案为：0

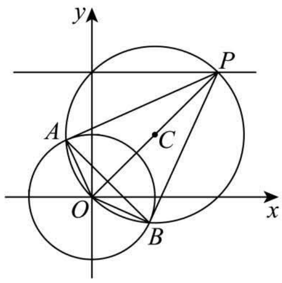
15. 过直线 $y=2$ 上任意一点 P 作圆 O： $x^2+y^2=1$ 的两条切线，则切点分别是 A,B，则 $\triangle OAB$ 面积的最大值为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$##$\dfrac{1}{4}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由 $OA\perp PA,OB\perp PB$ 得出点 A,B 在以 OP 为直径的圆 C 上是关键，通过两圆方程相减得到直线 AB 的方程，从而求出 $\triangle OAB$ 面积的表达式，运用函数思想求解即得.

【详解】



如图，设点 $P(t,2)$，因 $OA\perp PA,OB\perp PB$,故点 A,B 在以 OP 为直径的圆 C 上，

因圆心 $C(\frac{t}{2},1)$，半径为 $\dfrac{\sqrt{t^2+4}}{2}$，故圆 C 的方程为：$C:(x-\frac{t}{2})^2+(y-1)^2=\dfrac{t^2+4}{4}$，

又圆 O： $x^2+y^2=1$，将两式左右分别相减，整理得直线 AB 的方程为： $l_{AB}:tx+2y-1=0$，

于是，点 $O(0,0)$ 到直线 $l_{AB}:tx+2y-1=0$ 的距离为： $d=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}$，

$|AB|=2\sqrt{1-(\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}})^2}=2\sqrt{\dfrac{t^2+3}{t^2+4}}$，

故 $\triangle OAB$ 的面积为：$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{\dfrac{t^2+3}{t^2+4}}\times\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}=\dfrac{\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$，

不妨设 $m=\sqrt{t^2+3}$,则 $m\ge\sqrt{3}$，且 $t^2=m^2-3$，故 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{m}{m^2+1}=\dfrac{1}{m+\dfrac{1}{m}}$，

因 $y=m+\dfrac{1}{m}$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，故 $y\ge\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，此时 $S_{\triangle AOB}\le\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

即$t=0$时，点$P(0,2)$时，$\triangle OAB$面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

16. 已知四面体$ABCD$满足$BC=CD=BD=4\sqrt{3}$，它的体积为$28\sqrt{3}$，其外接球球O的表面积为100π，则点A在球O表面的轨迹长度为__________；线段AB长度的最小值为______.

【答案】 ①. 9π ②. $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】利用外接球的表面积求出外接球半径R，再根据勾股定理求出球心O到平面BCD的距离，再由锥体体积求出点A到平面BCD的距离h，直观想象可得点A在球O表面的轨迹，计算可得轨迹长度;由点A在圆上运动，到定点B的距离最值转化为圆台母线最短求解即可.

【详解】设外接球半径为R，

因为外接球的表面积为100π，则$4\pi R^2=100\pi$，解得$R=5$，

设$\triangle BCD$的中心为O_1，则$BO_1=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=4$，

如图过点B作球的轴截面，

则$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

设点A到平面BCD的距离为h，

$V_{A-BCD}=28\sqrt{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(4\sqrt{3}\right)^2h$，解得$h=7$.

则由题意知，点A在以5为半径的球面上，且距离平面BCD为7的平面内，

则点A在球O表面的轨迹为圆，设圆心为O_2，且$OO_2=h-3=4$

则$AO_2^2=OA^2-OO_2^2=5^2-4^2=9$， 即圆$O_2$的半径为3，

所以点A在球O表面的轨迹长度为9π；

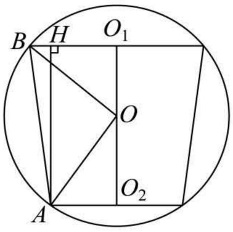
由题意可看作点A在圆台O_1O_2底面圆周O_2上运动，

则当AB为圆台母线时，AB最小，

即当A,B,O_1,O_2四点共面时，AB取最小值，

如图，$AB_{\min}=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{7^2+(4-3)^2}=5\sqrt{2}$.

故答案为：9π；$5\sqrt{2}$.



【点睛】方法点睛：对于立体几何空间轨迹的问题，研究的主要还是解析几何中的几种曲线：直线、圆、椭圆、双曲线与抛物线.常规解决方法有以下几种：

1.几何法：根据对动点运动过程中点、线、面性质或位置关系的分析，进行判定；

2.定义法：转化为平面轨迹问题，用圆锥曲线定义判定，或用代数法进行计算；

3.交轨法： 根据研究动点满足的不同条件分别确定动点所在空间几何体（线、面），再由公共（相交）部分确定轨迹；

4.基底（建系）法：通过选择基底（或建系）将几何问题数量化，得到动点满足的方程（组），进而分析方程表示的轨迹；

5.特殊值法：特别地，对于轨迹问题的选择题，根据空间图形线段长度关系取特殊值或位置进行排除.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=2a_1=2$，且$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+2, n为奇数\\4a_n, n为偶数\end{cases}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前10项和S_{10}.

【答案】（1）$a_n=\begin{cases}n, n为奇数\\2^{n-1}, n为偶数\end{cases}$；

（2）707

【解析】

【分析】（1）分奇偶项讨论结合等差数列、等比数列的通项公式计算即可；

（2）直接利用等差数列和等比数列求和公式计算即可.

【小问1详解】

由题意可知当$n=2k-1\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$时，

有$a_{n+2}-a_n=a_{2k+1}-a_{2k-1}=2$，此时数列$\{a_n\}$的奇数项成等差数列，

由题意可知$a_1=1$，公差为2，则$a_{2k-1}=1+2(k-1)=2k-1$，

所以$a_n=n$，（n为奇数），

当$n=2k\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$时，有$a_{n+2}\div a_n=a_{2k+2}\div a_{2k}=4$，

即此时数列$\{a_n\}$的偶数项成等比数列，

由题意可知$a_2=2$，公比为4，则$a_{2k}=2\times4^{k-1}=2^{2k-1}$，

所以$a_n=2^{n-1}$，（n为偶数），

综上$a_n=\begin{cases}n,n为奇数\\2^{n-1},n为偶数\end{cases}$.

【小问2详解】

由上可知$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(a_1+a_3+\cdots+a_9)+(a_2+a_4+\cdots+a_{10})$

$=(1+3+\cdots+9)+\left(2+2^3+\cdots+2^9\right)=\dfrac{(1+9)\times5}{2}+\dfrac{2\left(1-4^5\right)}{1-4}=707$

18. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$c=2a\cos A\cos B-b\cos2A$（$A\le B$）.

（1）求A；

（2）若AD是角A的内角平分线，且$AD=2$，求$\triangle ABC$周长的最小值.

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$；

（2）$4\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】（1）由已知结合正弦定理以及三角恒等变换公式即可求解;

（2）由AD是角A的内角平分线，可得到$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，化简得到$\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=b+c$，表示出周长，利用基本不等式计算即可.

【小问1详解】

因为$c=2a\cos A\cos B-b\cos2A$，

由正弦定理可得：$2R\sin C=2(2R\sin A)\cos A\cos B-2R\sin B\cos2A$,

所以$\sin C=2\sin A\cos A\cos B-\sin B\cos2A$

因为在$\triangle ABC$内，有$A+B+C=\pi$,所以$\sin C=\sin(A+B)$，

所以$\sin(A+B)=\sin 2A\cos B-\sin B\cos 2A=\sin(2A-B)$,

所以$A+B=2A-B$,或$A+B+2A-B=\pi$，

即$A=2B$， 或$A=\frac{\pi}{3}$，由$A\le B$，故$A=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为AD是角 A 的内角平分线，且$AD=2$，

所以$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$,即$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times 2c\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times 2b\sin\frac{\pi}{6}$，

整理得：$\frac{\sqrt{3}}{2}bc=b+c$，所以$bc=\frac{2\sqrt{3}}{3}(b+c)\ge\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{bc}$，所以$bc\ge\frac{16}{3}$，

当且仅当$b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，上式取到最小值，

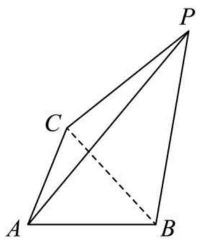
在$\triangle ABC$中由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$，

所以$\triangle ABC$周长：

$$C_{\triangle ABC}=a+b+c=\sqrt{b^2+c^2-bc}+\frac{\sqrt{3}}{2}bc\ge\sqrt{2bc-bc}+\frac{\sqrt{3}}{2}bc\ge 4\sqrt{3},$$

当且仅当$b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，所以$\triangle ABC$周长的最小值为$4\sqrt{3}$.

19. 已知三棱锥$P-ABC$中，$AB=AC=2$，$BA\perp AC$，$\angle PAC=\angle PAB=\frac{\pi}{3}$，$PA=4$.



（1）求点P到平面ABC的距离；

（2）求平面PAB与平面PBC夹角的正弦值.

【答案】（1）$2\sqrt{2}$

（2）$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】（1）利用线面垂直的判定定理和性质定理证得$PE\perp$平面ABC，再利用勾股定理求得PE，从而

得解；

（2）结合（1）中结论建立空间直角坐标系，利用空间向量法即可得解.

【小问 1 详解】

取BC中点D，连接AD，PD，

在$\triangle ACP$和$\triangle ABP$中，$AB=AC$，$AP=AP$，$\angle PAC=\angle PAB$，

可得$\triangle ACP\cong\triangle ABP$，则$CP=BP$，所以$PD\perp BC$，

因为$AD\perp BC$，且$AD\cap PD=D$，$AD,PD\subset$平面ADP，

所以$BC\perp$平面ADP，

在平面PAD中，过P点作$PE\perp AD$，交AD延长线于点E，连接CE，BE，PE，

因为$BC\perp$平面PAD，且$PE\subset$平面PAD，所以$BC\perp PE$，

又$AD\cap BC=D$，$AD,BC\subset$平面ABC，

所以$PE\perp$平面ABC，即PE为点P到平面ABC的距离，

在$\triangle PCA$中，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{3}$，$PA=4,AC=2$，

由余弦定理可得$PC^2=PA^2+AC^2-2PA\cdot AC\cos\angle PAC=4^2+2^2-2\times4\times2\times\dfrac{1}{2}=12$，则$PC=2\sqrt{3}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AD=CD=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PCD$中，$PD=\sqrt{PC^2-CD^2}=\sqrt{12-2}=\sqrt{10}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle PAE$中，$PE^2=PA^2-AE^2=PD^2-DE^2$，

则$16-\left(\sqrt{2}+DE\right)^2=10-DE^2$，解得$DE=\sqrt{2}$，

则$PE^2=PD^2-DE^2=10-2=8$，即$PE=2\sqrt{2}$，

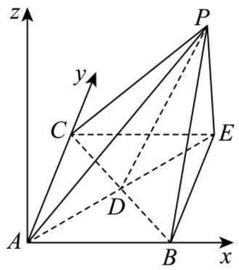
所以点P到平面ABC的距离为$2\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

由（1）知$CD=BD,AD=DE$，所以四边形$ABEC$是平行四边形，

又$AB\perp AC,AB=AC$，所以四边形$ABEC$是正方形，

以A为原点，AB为x轴，AC为y轴，如图建立空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(2,2,2\sqrt{2})$，

可得 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AP}=(2,2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(0,2,2\sqrt{2})$，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2a=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=2a+2b+2\sqrt{2}c=0\end{cases}$，

令 $b=\sqrt{2}$，则 $a=0$，$c=-1$，即 $\vec{m}=(0,\sqrt{2},-1)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x-2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=2y+2\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=-1$，则 $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$，即 $\vec{n}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-1\right)$，

设平面 PAB 与平面 PBC 的夹角 θ，则 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

可得 $\cos\theta=\left|\cos\vec{m},\vec{n}\right|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|2+1|}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+2+1}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

所以平面 PAB 与平面 PBC 的夹角的正弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

20. 在直角坐标系 xOy 中，动点 P 到 y 轴的距离比点 P 到点 $F\left(1,0\right)$ 的距离少 1.

（1）求动点 P 的轨迹方程 W；

（2）当 $x\geq 0$ 时，过点 $M\left(4,0\right)$ 的直线与 W 交于 A,B 两点，连接 AF，BF 延长与 W 分别交于 C、D 两点，求 $\triangle FCD$ 与 $\triangle FAB$ 面积之和 $S_{\triangle FCD}+S_{\triangle FAB}$ 的最小值.

【答案】（1）$y^2=\begin{cases}0,x<0\\ 4x,x\geq 0\end{cases}$；

（2）$\dfrac{51}{4}$.

【解析】

【分析】(1) 由点到直线及点的距离公式结合抛物线的定义计算即可；

(2) 设直线 AB 和 A,B 坐标，利用直线过定点及焦点弦性质先得出 C,D 坐标，从而判定 CD 过定点，通过消元转化及基本不等式求面积最值即可.

【小问 1 详解】

设点 $P(x,y)$，则由题意可知：$|x|+1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，

化简得 $2|x|=y^2-2x$，

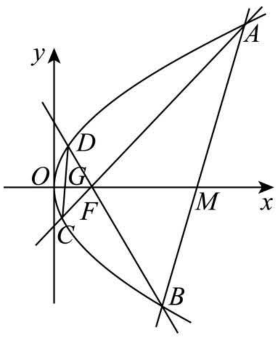
若 $x<0\Rightarrow y^2=0$，即 $x<0,y=0$，

若 $x\ge 0\Rightarrow y^2=4x$，

综上可知动点 P 的轨迹方程 W 为：$y^2=\begin{cases}0,x<0\\4x,x\ge 0\end{cases}$；

【小问 2 详解】

根据 (1) 知 $x\ge 0$ 时，$W:y^2=4x$，



由题意可设 $l_{AB}:x=ky+4,A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$，$C\left(\frac{y_C^2}{4},y_C\right),D\left(\frac{y_D^2}{4},y_D\right)$，

不妨令 A 在第一象限，则 B,C 在第四象限，D 在第一象限，如图所示，

联立抛物线方程 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ky+4\end{cases}\Rightarrow y^2-4ky-16=0$，显然 $y_1+y_2=4k,y_1y_2=-16$，

同理可设过 F 点的直线为 $x=my+1$，与抛物线联立有 $y^2-4my-4=0$，

则 $y_Cy_1=-4,y_Dy_2=-4$，所以 $C\left(\frac{4}{y_1^2},-\frac{4}{y_1}\right),D\left(\frac{4}{y_2^2},-\frac{4}{y_2}\right)$，

若$k=0$时，易得$y_1=-y_2=4$，则$C\left(\frac{1}{4},-1\right),D\left(\frac{1}{4},1\right)$，即$l_{CD}:x=\frac{1}{4}$，

若$k\neq 0$，则CD斜率存在，则$l_{CD}:x=\dfrac{\frac{4}{y_1^2}-\frac{4}{y_2^2}}{\frac{4}{y_2}-\frac{4}{y_1}}\left(y+\frac{4}{y_1}\right)+\frac{4}{y_1^2}$，

化简得$y_1y_2x=-\left(y_1+y_2\right)y-4\Rightarrow -16x=-4ky-4\Rightarrow x=\frac{k}{4}y+\frac{1}{4}$，

综上可知直线CD横过定点$G\left(\frac{1}{4},0\right)$，

所以$S_{\triangle FCD}+S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}\times|GF|\times\left(y_D-y_C\right)+\frac{1}{2}\times|MF|\times\left(y_1-y_2\right)$

$=\frac{3}{2}\left(y_1-y_2+\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)=\frac{51}{32}\left(y_1+\frac{16}{y_1}\right)\geq\frac{51}{4}$，

当且仅当$y_1=4$时取得最小值$\frac{51}{4}$.

21. “大地”渔业公司从A、B两不同设备生产厂商处共购买了80台同类型的设备.

（1）若这80台设备的购买渠道和一段时间后故障的记录如下表：

	从A处购买（台）	从B处购买（台）
运行良好（台）	46	14
出现故障（台）	14	6

试根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，分析设备故障情况是否与购买渠道有关；

（2）若每台设备发生故障的概率都是0.01，且发生故障时由一个人独立完成维修.现有两种配备维修工人的方案，甲方案是由4个人维修，每个人各自独立负责20台；乙方案是由3个人共同维护这80台.请判断在这两种方案下设备发生故障时不能及时维修的概率的大小关系？并从公司经营者的角度给出方案选择的建议.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.1	0.05	0.01	0.005
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879

【答案】(1) 否　　(2) 甲方案下设备发生故障时不能及时维修的概率大，选择乙方案

【解析】

【分析】(1) 根据 χ^2 计算公式运算，对比临界值即可求解；

(2) 根据题意，分别求得甲方案和乙方案，结合对立事件和独立重复试验的概率计算公式，分别求得设备发生故障时不能及时维修的概率，根据大小关系，即可得到结论.

【小问 1 详解】

假设设备故障情况与购买渠道无关联，

由题意，$\chi^2=\dfrac{80(46\times 6-14\times 14)^2}{60\times 20\times 60\times 20}\approx 0.356<3.841$，

依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可推断假设成立，即认为设备故障情况与购买渠道无关联.

【小问 2 详解】

对于甲方案：以 X 记“第 1 人维护的 20 台设备中同一时刻发生故障的台数”，

以 $A_i\left(i=1,2,3,4\right)$ 表示事件“第 i 人维护的 20 台设备发生故障时不能及时维修”，

则知 80 台设备发生故障时不能及时维修的概率为：$P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)\geq P\left(A_1\right)=P\left(X\geq 2\right)$，

而 $X\sim B\left(20,0.01\right)$，故有 $P\left(X\geq 2\right)=1-\left(1-0.01\right)^{20}-\mathrm{C}_{20}^{1}\cdot\left(1-0.01\right)^{19}\cdot 0.01\approx 0.0169$，

所以 $P\left(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\right)\geq 0.0169$；

对于乙方案：以 Y 记“80 台设备中同一时刻发生故障的台数”，此时 $Y\sim B\left(80,0.01\right)$，

则 80 台设备发生故障时不能及时维修的概率为

$P\left(X\geq 4\right)=1-\left(1-0.01\right)^{80}-\mathrm{C}_{80}^{1}\cdot\left(1-0.01\right)^{79}\cdot 0.01-\mathrm{C}_{80}^{2}\cdot\left(1-0.01\right)^{78}\cdot\left(0.01\right)^2$

$-\mathrm{C}_{80}^{3}\cdot\left(1-0.01\right)^{77}\cdot\left(0.01\right)^3\approx 0.0087$，可得 $0.0087<0.0169$，

故选择乙方案能让故障设备更大概率得到及时维修，使得公司的生产效率更高.

22. 设函数 $f\left(x\right)=\sin x-x\cos x$，$g\left(x\right)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x$.

(1) ①当 $x\in\left[0,\pi\right]$ 时，证明：$f(x)\geq 0$；

②当 $x\in\left[-\pi,\pi\right]$ 时，求 $g\left(x\right)$ 的值域；

(2) 若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n\cos a_n$，$a_n>0$，证明：

$\left(3a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\right)\cos a_1\cos a_2\cos a_3\cdots\cos a_n<2$（$n\in\mathrm{N}^*$）.

【答案】(1)①证明过程见解析，②$\left[-1-\dfrac{\pi^2}{2},1\right]$

(2)证明过程见解析

【解析】

【分析】(1)①求导，得到函数单调性，求出$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$；②先得到$g\left(x\right)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x$为偶函数，考虑$x\in\left[0,\pi\right]$时，求导，结合①可知，$g\left(x\right)$在$x\in\left[0,\pi\right]$上单调递减，从而求出函数最值，求出值域；

(2)先得到$\cos a_1\cos a_2\cos a_3\cdots\cos a_n=a_{n+1}$，故只需证明$3a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{2}{a_{n+1}},n\in\mathrm{N}^*$，由(1)可知$a_n<\dfrac{2}{a_{n+1}}-\dfrac{2}{a_n}$，从而裂项相消法求和得到证明.

【小问1详解】

①$f'\left(x\right)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x\geq 0$在$x\in\left[0,\pi\right]$恒成立，

故$f\left(x\right)=\sin x-x\cos x$在$x\in\left[0,\pi\right]$上单调递增，

故$f\left(x\right)\geq f\left(0\right)=0$，证毕；

②$\forall x\in\left[-\pi,\pi\right]$，恒有$g\left(-x\right)=\left[1+\dfrac{\left(-x\right)^2}{2}\right]\cos\left(-x\right)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x=g\left(x\right)$，

故$g\left(x\right)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x$为偶函数，

当$x\in\left[0,\pi\right]$时，$g'\left(x\right)=x\cos x-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\sin x=\left(x\cos x-\sin x\right)-\dfrac{x^2}{2}\sin x$，

由①可知，$x\cos x-\sin x\leq 0$在$x\in\left[0,\pi\right]$上恒成立，

又$-\dfrac{x^2}{2}\sin x\leq 0$，故$g'\left(x\right)\leq 0$在$x\in\left[0,\pi\right]$上恒成立，

故$g\left(x\right)$在$x\in\left[0,\pi\right]$上单调递减，

故$g\left(x\right)_{\min}=g\left(\pi\right)=\left(1+\dfrac{\pi^2}{2}\right)\cos\pi=-1-\dfrac{\pi^2}{2}$，$g\left(x\right)_{\max}=g\left(0\right)=1$，

结合函数在$x\in[-\pi,\pi]$上为偶函数可得，函数值域为$\left[-1-\frac{\pi^2}{2},1\right]$；

【小问 2 详解】

因为$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n\cos a_n$，

所以$\cos a_1\cos a_2\cos a_3\cdots\cos a_n=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}$，

其中$a_n>0$，故只需证明$3a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{2}{a_{n+1}},n\in\mathrm{N}^*$，

因为$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n\cos a_n$，

所以$0<a_{n+1}=a_n\cos a_n\le a_n\le 1$，

由（1）可知$a_{n+1}=a_n\cos a_n<a_n\cdot\frac{1}{1+\frac{a_n^2}{2}}=\frac{2a_n}{2+a_n^2}$，

上式两边取倒数得$\frac{1}{a_{n+1}}>\frac{2+a_n^2}{2a_n}=\frac{1}{a_n}+\frac{a_n}{2}$，故$a_n<\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}$，

于是$3a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<2a_1+\left(\frac{2}{a_2}-\frac{2}{a_1}\right)+\left(\frac{2}{a_3}-\frac{2}{a_2}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}\right)$

$=2a_1-\frac{2}{a_1}+\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_{n+1}}$，$n\in\mathrm{N}^*$，

所以$(3a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\cos a_1\cos a_2\cos a_3\cdots\cos a_n<2$（$n\in\mathrm{N}^*$）.

【点睛】导函数证明数列相关不等式，常根据已知函数不等式，用关于正整数的不等式代替函数不等式中的自变量，通过多次求和（常常用到裂项相消法求和）达到证明的目的，此类问题一般至少有两问，已知的不等式常由第一问根据特征式的特征而得到.


微信搜一搜
自主选拔在线