2023—2024学年度上期高2024届期末考试理科数学参考答案及评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	B	B	B	C	D	B	C	B	A

12.提示：法1：当$x>1$时，$\dfrac{x+y+3}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}=\dfrac{x-1+y+4}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2+(y+4)^2+2(x-1)(y+4)}{(x-1)^2+(y+4)^2}}$

$=\sqrt{1+\dfrac{2}{\left(\dfrac{x-1}{y+4}\right)^2+\left(\dfrac{y+4}{x-1}\right)^2}}$，此时$\dfrac{y+4}{x-1}$看作$(x,y)$与$(1,-4)$连线的斜率，转化为找切线斜率问题

法2：$\dfrac{x+y+3}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}=\dfrac{x-1+y+4}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}=\dfrac{(x-1)\cdot 1+(y+4)\cdot 1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2}}$

设点$Q(1,-4)$，上述表达式可看成向量$(1,1)$在向量$\overrightarrow{QP}$上的投影.

二、填空题:

13. 3或$\dfrac{8}{3}$　　14. $\dfrac{5}{12}$　　15. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　16. 674或1156

16题：提示：分三种情况：

（1）若$a_1=2k+1$，（$k\in N$），则$a_2=6k+4, a_3=3k+2$，此时$11k+7=2023$，无解；

（2）若$a_1=2k$，（k是奇数），则$a_2=k, a_3=3k+1$，此时$6k+1=2023, k=337, a_1=674$；

（3）若$a_1=4k$，（$k\in N$），则$a_2=2k, a_3=k$，此时$7k=2023, k=289, a_1=1156$.

三、解答题:

17.解：（1）在ΔABC中，由正弦定理及题设得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，

故$\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sin 150°}$，解得$\sin B=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$，　……………………………………………3分

又$0°<B<30°$，所以$\cos B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.　……………………………………………6分

（2）设$AD=x$，则$CD=x$，$BD=2x$，因为$\angle ADC=\pi-\angle BDC$，所以$\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，

由余弦定理得$\dfrac{4x^2+x^2-7}{4x^2}=-\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$，所以$x^2=1$，解得$x=1$或$x=-1$（舍去），

所以ΔACD为等边三角形，所以$A=60°$，……………………………………10分

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC\sin A=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1\times\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.　………………………12分

18.解：（1）由已知得2×2列联表补充如下：

	物理类	历史类	合计
男生	35	15	50
女生	25	25	50
合计	60	40	100

……………………………………………2分

假设为H_0：选科分类与性别无关联，

因为$K^2=\dfrac{100\times(35\times25-25\times15)^2}{60\times40\times50\times50}=\dfrac{25}{6}\approx4.16>3.841$，　　　　…………………………5 分

根据小概率值0.05 的独立性检验，推断H_0不成立，

即认为选科分类与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.05；　…………………….6 分

（2）由已知，50 名女学生中选择物理类和选择历史类的比例为$1:1$，

因此抽取 6 名女生中，选择物理类和选择历史类的人数均为 3 名．　　……………7 分

所以随机变量X的取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}=\dfrac{3}{5}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}=\dfrac{1}{5}$，…………9 分

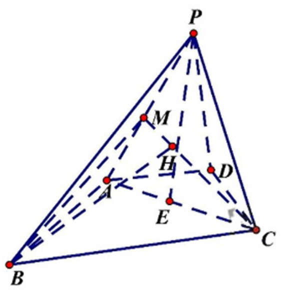
随机变量X的分布列如下：

X	1	2	3
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

所以$E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$．…………………………………………12 分

19．(1) 证明：由题意可得$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=2$，$AB=\sqrt{2+2}=2$，$BC=2\sqrt{2}$，

所以$AB^2+AC^2=BC^2$，即$AB\perp AC$　因为平面$ABCD\perp$平面PAC，且满足平面$PAC\cap$平面$ABCD=AC$，$AB\subset$平面$ABCD$　所以$AB\perp$平面PAC，又因为$PC\subset$平面PAC，所以$PC\perp AB$　…………………4 分



(2) 法 1：解：由题意可得因为$PA=PC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}AC=\sqrt{5}$，

如图，过P作$PE\perp AC$于E，过B作$BH\perp MC$于H　因为平面$ABCD\perp$平面PAC，所以$PE\perp$平面$ABCD$　　因为M是PA的中点，设M到平面$ABCD$的距离为d_1

则满足$d_1=\dfrac{1}{2}PE=1$，ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$，

则三棱锥$M-ABC$的体积$V=\dfrac{1}{3}\cdot2\cdot1=\dfrac{2}{3}$………………6 分

在ΔPAC中，$\cos\angle PAC=\dfrac{AE}{PA}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$MC^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cos\angle PAC=\dfrac{13}{4}$．

$S_{\Delta AMC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AM\sin\angle MAC=1$，设$B$到平面$MAC$的距离为$d_2$，则$\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot d_2=\dfrac{2}{3}$，即$d_2=2$……8 分

在ΔPAB中，$BM^2=BA^2+AM^2=\dfrac{21}{4}$，

在ΔMBC中，$\cos\angle BMC=\dfrac{BM^2+MC^2-BC^2}{2BM\cdot MC}=\sqrt{\dfrac{1}{21\times13}}$，则$\sin\angle BMC=\sqrt{\dfrac{272}{21\times13}}$

ΔMBC的面积$S_{\Delta MBC}=\dfrac{1}{2}MB\cdot MC\sin\angle BMC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{272}{21\times13}}=\dfrac{\sqrt{17}}{2}=\dfrac{1}{2}BH\cdot MC$

则$BH=\sqrt{17}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，设平面$MBC$与平面$PAC$夹角为$\theta$，则$\sin\theta=\dfrac{d_2}{BH}=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{221}}{17}$

所以平面MBC与平面PAC夹角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{221}}{17}$　　　　…………………12 分

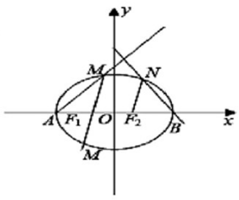
法 2：提示$|\cos\theta|=\dfrac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MBC}}=\dfrac{2}{\sqrt{17}}$，则$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{221}}{17}$（第一问 4 分，第二问 8 分）

法 3：以E为原点O，PE为z轴建立空间直角坐标系（第一问 4 分，第二问 8 分）

20.解：（1）由题意可得：$2b=4\sqrt{2}$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{3}$，$a^2=b^2+c^2$．联立解得：$b=2\sqrt{2}$，$c=1$，$a=3$．

$\therefore$ 椭圆C的标准方程为：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$．　　…………………………………………4 分

(2) $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 设 F_1M 的方程为: $x=my-1$, $M(x_1, y_1)$, $(y_1>0)$,
直线 F_1M 与椭圆的另一个交点为 $M'(x_2, y_2)$. $\because F_1M // F_2N$, ……………5 分



根据对称性可得: $N(-x_2, -y_2)$　联立 $\begin{cases}8x^2+9y^2=72\\x=my-1\end{cases}$, 化为: $(8m^2+9)y^2-16my-64=0$,

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{16m}{8m^2+9}$, $y_1y_2=\dfrac{-64}{8m^2+9}$, $\because 3k_1+2k_2=0$, $\therefore \dfrac{3y_1}{my_1+2}+\dfrac{2y_2}{my_2+2}=0$,

即 $5my_1y_2+6y_1+4y_2=0$, 联立解得: $y_1=\dfrac{128m}{8m^2+9}$, $y_2=\dfrac{-112m}{8m^2+9}$, ……………………9 分

$\because y_1>0$, $y_2<0$, $\therefore m>0$. $\therefore y_1y_2=\dfrac{128m}{8m^2+9}\cdot\dfrac{-112m}{8m^2+9}=\dfrac{-64}{8m^2+9}$, $\therefore m=\pm\dfrac{\sqrt6}{12}$. 又 $m>0$ $\therefore m=\dfrac{\sqrt6}{12}$

$\therefore$ 直线 F_1M 的方程为 $x=\dfrac{\sqrt6}{12}y-1$, 即 $2\sqrt6x+y+2\sqrt6=0$. ………………………12 分

21. (1) 解: 当 $a=1$ 时, $f(x)=x\ln x-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2x}+2$, 则 $f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}$, 注意到 $f'(1)=0$,

此时令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}$, 则 $g'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ 且满足 $g(1)=0$

当 $x\in(0,1)$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$,

所以当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极小值即最小值 0, 所以 $\forall x\in(0,+\infty)$, $g(x)\geq 0$ 恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$……………….3 分

(2) 解: 由于 $f(2)=2a\ln 2-3-\dfrac{1}{4}+2>0$, 易知 $a>0$

①当 $a\geq 1$ 时, 对 $\forall x\in[1,+\infty)$, $f(x)=ax\ln x-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2x}+2\geq x\ln x-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2x}+2$

由 (1) 可得此时 $f(x)\geq 0$ 恒成立, 所以 $a\geq 1$ 满足条件　…………………………4 分

②当 $0<a<1$ 时, $f'(x)=a(\ln x+1)-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}$, 令 $h(x)=a(\ln x+1)-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}$,

则 $h'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{ax^2-1}{x^3}=\dfrac{a\left(x+\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}{x^3}$, 其中 $\sqrt{\dfrac{1}{a}}>1$

当 $x\in\left(1,\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)$ 时, $h'(x)<0$, 则 $h(x)$ 单调递减, 则 $h(x)<h(1)=a-1<0$, 即 $f'(x)<0$

此时 $f(x)$ 单调递减, 则 $f(x)<f(1)=0$, 不满足题意　综上所述, a 的取值范围为 $[1,+\infty)$……7 分

(3) 由 (2) 可得当 $a=1$ 时, $\forall x\in[1,+\infty)$, $f(x)=x\ln x-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2x}+2\geq 0$ 即 $\ln x\geq\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{2}{x}$

令 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, 注意到 $g(1)=0$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{-(x-1)^2}{2x^2}\leq 0$

则当 $x>1$ 时, $g(x)<g(1)=0$, 即 $\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$, 综上, 当 $x>1$ 时, $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{2}{x}<\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$……9 分

分别令 $x=\dfrac{n+1}{n}$, $\dfrac{n+2}{n+1}$, …, $\dfrac{2n}{2n-1}$ 代入上面不等式可得

$$\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}=\frac{3}{2}+\frac{n^2}{2(n+1)^2}-\frac{2n}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\qquad(1)$$

$$\frac{1}{2(n+2)^2}+\frac{1}{n+2}=\frac{3}{2}+\frac{(n+1)^2}{2(n+2)^2}-\frac{2(n+1)}{n+2}<\ln\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\qquad(2)$$

$$\frac{1}{2(2n)^2}+\frac{1}{2n}=\frac{3}{2}+\frac{(2n-1)^2}{2(2n)^2}-\frac{2(2n-1)}{2n}<\ln\frac{2n}{2n-1}<\frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n-1}-\frac{2n-1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right) \quad \text{(n)}$$

$$\because \ln 2=\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\right)=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n}{2n-1} \quad \text{(n+1)}$$

则将(1)(2)⋯(n)(n+1)式代入 $\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ 可得 …………………10 分

$$\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{4n}$$

$$\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

则 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)-\frac{1}{4(n+2)}=\frac{n-1}{4(n+1)(n+2)(2n+1)}\geq 0$

即 $\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)\geq\frac{1}{4(n+2)}$

综上，对于任意 $n\in N^*$， $\frac{1}{4(n+2)}<\ln 2-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{4n}$ ……………12 分

22.解：（1）由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$．将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入得， $x^2+y^2=2x$，

所以 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$． ……………………………………5 分

（2）设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ （t 为参数），

所以 $M\left(\frac{1}{2},0\right)$ 在 l 上，把 l 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=1$，可得 $t^2-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{3}{4}=0$，

所以 $\Delta=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{4}>0$，且 $t_1+t_2=\frac{\sqrt{3}}{2},t_1t_2=-\frac{3}{4}<0$， ………………………7 分

故 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$． ………………10 分

23. （1）解：根据题意，函数 $f(x)=|2x-1|+x+\frac{1}{2}=\begin{cases}3x-\frac{1}{2},x\geqslant\frac{1}{2},\\ -x+\frac{3}{2},x<\frac{1}{2},\end{cases}$，

所以 $f(x)$ 为在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 单调递减，在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增，所以 $f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，即 $m=1$． ………………5 分

（2）证明：由（1）知，$m=1$，所以 $a+b+c=1$，又因为 a，b，c 为正实数，$a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，

所以 $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+bc+ac)$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，

所以 $1=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$． ………………10 分