成都石室中学2023-2024年度上期高2024届期末考试

数学试题（文）

参考答案

1．若复数z满足$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$（i是虚数单位），则$\bar{z}=$（   ）

A．$-1+2\mathrm{i}$　　B．$-1-2\mathrm{i}$　　C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$1+2\mathrm{i}$

【答案】A

【分析】计算$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，再计算共轭复数即可.

【详解】$z\mathrm{i}=2-\mathrm{i}$，则$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-1-2\mathrm{i}$，则$\bar{z}=-1+2\mathrm{i}$.

故选：A

2.已知集合$M=\left\{y\left|y=2^x,x\le 1\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|y=\sqrt{x-x^2}\right.\right\}$，则$M\cup N$等于（   ）

A．$(0,1]$　　B．$\{2\}$　　C．$[0,2]$　　D．$(-\infty,2]$

2．C

【分析】根据指数函数单调性得到$M=(0,2]$，解不等式求出$N=[0,1]$，利用并集概念求出答案.

【详解】$y=2^x\in(0,2]$，故$M=(0,2]$，

令$x-x^2\ge 0$，解得$0\le x\le 1$，故$N=[0,1]$，

故$M\cup N=[0,2]$.

故选：C

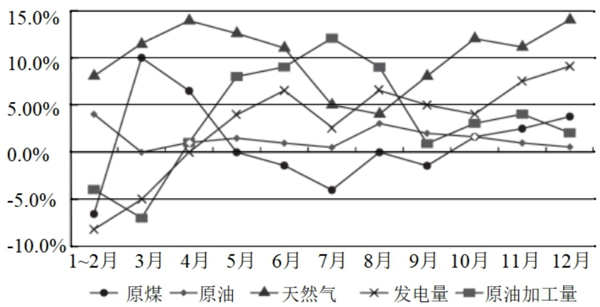
3．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_{13}=26$，则$a_3+a_8+a_{10}$的值为

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

【答案】选A

【解析】由$S_{13}=13a_7=26$，可得$a_7=2$，则$a_3+a_8+a_{10}=3a_7=6$.

4.下图是2023年1~12月份品种能源生产当月同比增长率情况变化图.下列说法错误的是



A．4~7月，原煤及天然气当月同比增长率呈下降趋势

B．9~12月，原煤及天然气当月同比增长率总体呈上升趋势

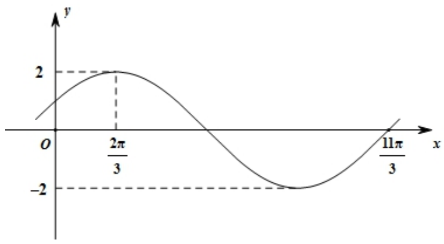
C．7月份品种能源生产当月同比增长率最高的是原油加工量同比增长率

D．2023年分品种能源生产当月同比增长率波动最小的是发电量同比增长率

【答案】D

【解析】观察题中所给的折线图，可知：
4~7 月，原煤及天然气当月同比增长率是下降的，呈下降趋势，所以 A 项正确；
9~12 月，虽然天然气 11 月比 10 月偏低，但总体趋势仍为上升的，所以原煤及天然气当月同比增长率总体呈上升趋势，所以 B 正确；
图中 7 月份，只有原煤加工上升，其他品种能源均比 6 月份低，所以 C 项正确；
由图易知，相比发电量，原油的曲线波动幅度更小，所以 D 项错误；

5.函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 部分图象如图所示，则 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

【答案】选 D

【解析】由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象知，$A=2$，$\dfrac{3}{4}T=\dfrac{11\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3}=3\pi$，

解得 $T=4\pi=\dfrac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\ \omega=\dfrac{1}{2}$，又 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)=2$，可得 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，$k\in Z$，$\because |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore$ 可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore\ f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore\ f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

6．已知圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 与中心在原点、焦点在坐标轴上的双曲线 D 的一条渐近线相切，则双曲线 D 的离心率为（　）

.A. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　　B．3　　C. $\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\dfrac{3}{2}$

【答案】D

【分析】分双曲线的焦点在 x 轴上和 y 轴上，由圆心到渐近线的距离等于半径列式求解即可.

【详解】因为 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 可化为 $\left(x-3\right)^2+y^2=4$，

则圆 C 的圆心为 $\left(3,0\right)$，半径为 2，

当双曲线的焦点在 x 轴上时，设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则其渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，

由题意得 $\dfrac{3b}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$，即 $5b^2=4a^2$，所以 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{4}{5}$，

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

当双曲线的焦点在 y 轴上时，设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$，则其渐近线方程为 $ax\pm by=0$，

由题意得 $\frac{3a}{\sqrt{b^2+a^2}}=2$，即 $5a^2=4b^2$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{4}$，

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}$，

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为

A. $2x+y-1=0$　　B. $2x-y-3=0$　　C. $2x+y-3=0$　　D. $2x-y-1=0$

【答案】选 C

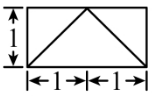
【解析】因为 $x<0$，$f(x)=x^3-x+1$，$f(-1)=1$，又由 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore f(1)=1$，

令 $-x<0$，则 $f(-x)=-x^3+x+1$，根据 $f(x)$ 是偶函数，$f(-x)=f(x)$，

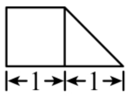
得到 $x>0$ 时，$f(x)=-x^3+x+1$，所以，$x>0$ 时，$f'(x)=-3x^2+1$，$f'(1)=-2$，

故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=-2(x-1)$，即 $2x+y-3=0$.

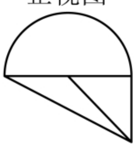
8．已知一个组合体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　）



正视图



侧视图


俯视图

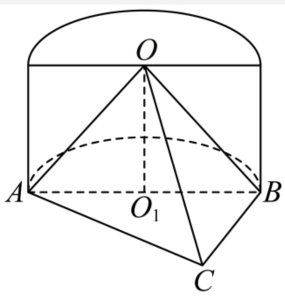
A. $2\pi+2+\sqrt{2}$　　B. $2\pi+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

C. $2\pi+2+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　　D. $2\pi+3+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

【答案】C

【分析】先由三视图原几何体，再分别求得各面的面积相加即可得解.

【详解】由题知，该三视图对应的几何体的直观图如图所示，



其中半圆柱的底面半径为 1、高为 1，三棱锥 $O-ABC$ 中，O 在底面 ABC 的射影 O_1 为 AB 的中点，$BC\perp AB$，$BC=1$，

$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，

因为 $OO_1 \perp$ 面 ABC， $BC \subset$ 面 ABC，所以 $BC \perp OO_1$，

又 $BC \perp AB$， $AB \cap OO_1 = O_1, AB, OO_1 \subset$ 面 ABO，所以 $BC \perp$ 面 ABO，

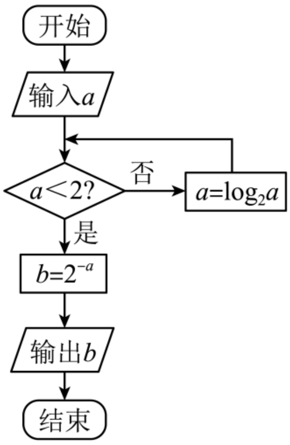
又 $OB \subset$ 面 ABO，故 $BC \perp OB$，

$\therefore OC = \sqrt{3}$， $\therefore AC^2 = OA^2 + OC^2$， $\therefore OA \perp OC$，

$\therefore$ 该几何体的表面积为 $\pi \times 1 \times 1 + \pi \times 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\pi + 2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

故选：C.

9．执行如图所示的程序框图，若随机输入的 $a \in [0,16)$，则输出的 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 的概率为（　）



A．$\frac{3}{16}$　　　B．$\frac{15}{16}$　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{3}{4}$

【答案】B

【分析】根据 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 可得 $a \in [1,2)$，再根据循环结构可得当 $a \in [1,16)$ 时均能得到 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$，从而可得答案.

【详解】由框图可得若 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$，则 $\frac{1}{4} < 2^{-a} \le \frac{1}{2}$，解得 $a \in [1,2)$.

故当 $a \in [0,1)$，满足 $a < 2$，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$；

当 $a \in [1,2)$ 时，满足 $a < 2$，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$；

当 $a \in [2,4)$ 时，不满足 $a < 2$，此时 $a = \log_2 a \in [1,2)$，故可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$；

当 $a \in [4,16)$ 时，不满足 $a < 2$，此时 $a = \log_2 a \in [2,4)$；

不满足 $a < 2$，此时 $a = \log_2 a \in [1,2)$，可得输出 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

故当 $a \in [1,16)$ 时均能得到 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$，故输出的 $b \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 的概率为 $\frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$.

故选：B

10.若 $2^x = 3$， $3^y = 4$，则下列选项正确的是

A. $y>\frac{3}{2}$　　B. $x<y$　　C. $\frac{1}{x}+y>2$　　D. $x+y>2\sqrt{2}$

【答案】选 D

【解析】因为 $2^x=3$，$3^y=4$，所以 $x=\log_2 3, y=\log_3 4$，

因为 $\log_2 3>\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，$\log_3 4<\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，即 $x>\frac{3}{2}, y<\frac{3}{2}$,所以 $x>y$，所以 A，B 错误；

因为 $\frac{1}{x}+y=\frac{1}{\log_2 3}+\log_3 4=\log_3 2+\log_3 4=\log_3 8<\log_3 9=2$，所以 $\frac{1}{x}+y<2$，所以 C 错误；

因 $x+y=\log_2 3+\log_3 4=\log_2 3+2\log_3 2=\log_2 3+\frac{2}{\log_2 3}>2\sqrt{\log_2 3\cdot\frac{2}{\log_2 3}}=2\sqrt{2}$，所以 D 正确.

11. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在球 O 的内部，球心 O 在平面 $ABCD$ 上，若球的半径为 $\sqrt{3}$，$AB=BC$，则该长方体体积的最大值是

A．4　B． 8　C．12　D．18

【答案】选 A

【解析】设长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h，设 $AB=a$，则 $BD=\sqrt{2}a$，所以 $\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.由勾股定理

得 $h^2+(\frac{BD}{2})^2=\sqrt{3}^2=3$ 即 $h^2+\frac{a^2}{2}=3$ 得 $a^2=6-2h^2$，

所以长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $V=a^2h=\left(6-2h^2\right)h=-2h^3+6h$，

设 $f(h)=-2h^3+6h$，其中 $0<h<\sqrt{3}$，则 $f'(h)=-6h^2+6$，令 $f'(h)=0$，得 $h=1$，

当 $0<h<1$ 时，$f'(h)>0$，$f(h)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；当 $1<h<\sqrt{3}$ 时，$f'(h)<0$，$f(h)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递减.所以函数 $V=f(h)$ 在 $h=1$ 处取得极大值，亦即最大值，则 $V_{\max}=f(1)=4$.

因此该长方体的体积的最大值为 4.

12．曲线 C 是平面内与三个定点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 和 $F_3(0,1)$ 的距离的和等于 $2\sqrt{2}$ 的点的轨迹.给出下列四个结论：

①曲线 C 关于 x 轴、y 轴均对称；

②曲线 C 上存在点 P，使得 $|PF_3|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

③若点 P 在曲线 C 上，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大值是 1；

④曲线 C 上存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

其中所有正确结论的序号是（　　）

A. ②③④　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③④

【答案】C ③④

【分析】①由已知表示出 C 的方程，观察方程的对称性可以判断结果；②假设结论成立，推理出曲线不存在，不合题意；③点 P 在椭圆上顶点时，满足题意，且面积最大；④寻找曲线 C 上的一个特殊点，验证 $\angle F_1PF_2$ 为钝角.

【详解】设曲线 C 上任意一点 $P(x，y)$，由题意可知 C 的方程为

$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{2}$.

①错误,在此方程中用 $-x$ 取代 x，方程不变，可知 C 关于 y 轴对称；同理用 $-y$ 取代 y，方程改变，可知 C 不关于 x 轴对称，故①错误.

②错误,若 $|PF_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}<|F_1F_2|=2$,曲线 C 不存在，故②错误.

③正确, $|PF_1|+|PF_2|\le|PF_1|+|PF_2|+|PF_3|=2\sqrt{2}$，$P$ 应该在椭圆 D：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 内(含边界)，曲线 C 与椭圆 D 有唯一的公共点 $F_3(0,1)$，此时 $|F_1F_2|=2$，$|OF_3|=1$,当点 P 为 F_3 点时，$\triangle F_1PF_2$ 的面积最大，最大值是 1；故③正确

④正确，由③可知，取曲线 C 上点 $F_3(0,1)$，此时 $\angle F_1F_3F_2=90^\circ$，下面在曲线 C 上再寻找一个特殊点 $P(0,y)$，$0<y<1$，则 $2\sqrt{1+y^2}+1-y=2\sqrt{2}$，

把 $2\sqrt{1+y^2}=2\sqrt{2}-1+y$ 两边平方，整理得 $3y^2+(2-4\sqrt{2})y+4\sqrt{2}-5=0$，

解得 $y=\dfrac{4\sqrt{2}-2\pm(8-4\sqrt{2})}{6}$，即 $y=1$ 或 $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}$.

因为 $0<\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}<1$，则取点 $P\left(0,\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}\right)$，此时 $\angle F_1PF_2>90^\circ$.故④正确.

故答案为：③④.

【点睛】易错点睛：与椭圆相关的综合问题，难度大，要注意：

(1)注意观察方程的特征，利用代数方法判断曲线 C 的对称性；

(2)适当利用反向推理，假设成立，再反向推理看是否合理；

(3)椭圆焦点三角中，当点在椭圆上下顶点时，焦点三角形面积最大，椭圆上点与两个焦点的张角最大；

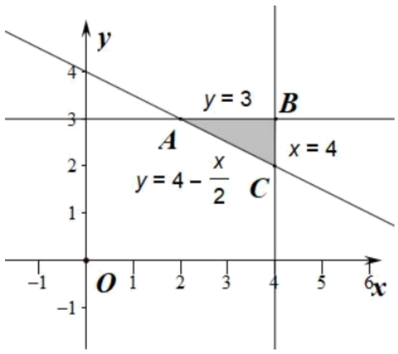
(3)验证存在性的问题，只需找到一个正例就可以说明其存在性；验证某个结论错误时，只需一个反例即可说明.

13. 若 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\ge 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为__________.

【答案】7

【解析】由题意可知，约束条件为 $\begin{cases}x+2y\ge 8\\0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$，

根据约束条件可绘出可行域：



当目标函数经过点 $B(4,3)$ 时取最大值，$z_{\max}=4+3=7$.

14. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\log_2\dfrac{2}{x}$，则不等式 $f(\dfrac{1}{x}-1)>\dfrac{1}{2}$ 的解集为__________.

【答案】$\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

【解析】由题意，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\log_2\dfrac{2}{x}$，根据初等函数的性质，可得函数 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 为单调递减函数，且 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，则不等式 $f(\dfrac{1}{x}-1)>\dfrac{1}{2}$ 等价于 $0<\dfrac{1}{x}-1<2$，解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$，所以不等式的解集为 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$.

15．已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos\left(2\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ 的值为__________.

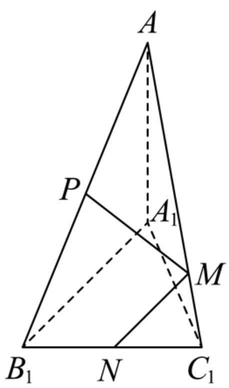
【答案】$-\dfrac{5}{9}$

【分析】利用倍角公式和诱导公式求解即可.

【详解】$\cos\left(2\alpha+\dfrac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}+\pi\right)=-\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-1=-\dfrac{5}{9}$

16．如图，在三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1,\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，$A_1B_1=2A_1A=2B_1C_1=2,P$ 为线段 AB_1 的中点，M,N 分别为线段 AC_1 和线段 B_1C_1 上任意一点，则 $\sqrt{5}PM+MN$ 的最小值为__________.



【答案】$\sqrt{5}$

【分析】先利用线面垂直的判定定理推得 $B_1C_1 \perp AB_1$,再利用面积相等在 $Rt\triangle AB_1C_1$ 中推得

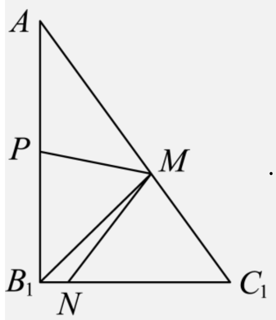
$\sqrt{5}PM\sin\angle MPA + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$，从而得到 $\sqrt{5} \le \sqrt{5}PM + MN$，由此得解.

【详解】因为 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$， $A_1B_1, B_1C_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1 \perp B_1C_1, AA_1 \perp A_1B_1$，

又 $\angle A_1B_1C_1 = 90°$， $B_1C_1 \perp A_1B_1$，

因为 $AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$， $AA_1, A_1B_1 \subset$ 平面 AB_1A_1，所以 $B_1C_1 \perp$ 平面 AB_1A_1，

又 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1A_1，所以 $B_1C_1 \perp AB_1$,



又在 $Rt\triangle AA_1B_1$ 中， $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2} = \sqrt{5}$，

在 $Rt\triangle AB_1C_1$ 中， $S_{\triangle AB_1M} + S_{\triangle B_1MC_1} = S_{\triangle AB_1C_1}$，

故 $\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times PM\sin\angle MPB_1 + \frac{1}{2} \times 1 \times MN\sin\angle MNC_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5}$，

则 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$，

又 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 \le \sqrt{5}PM, MN\sin\angle MNC_1 \le MN$，

所以 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPB_1 + MN\sin\angle MNC_1 \le \sqrt{5}PM + MN$，

即 $\sqrt{5} \le \sqrt{5}PM + MN$，当且仅当 $\angle MPB_1 = 90°, \angle MNC_1 = 90°$ 时，等号成立，

当 $\angle MPB_1 = 90°$ 时， M 为 AC_1 的中点，此时当 $\angle MNC_1 = 90°$ 时， N 为 B_1C_1 的中点，

综上所述 $\sqrt{5}PM + MN$ 的最小值是 $\sqrt{5}$.

【点睛】关键点睛：本题的突破口是如何解决 PM, MN 的系数问题，利用三角形面积公式与面积相等得到 $\sqrt{5}PM\sin\angle MPA + MN\sin\angle MNC_1 = \sqrt{5}$ 即可得解.

17．某学校研究性学习小组在学习生物遗传学的过程中，为验证高尔顿提出的关于儿子成年后身高 y（单位：cm）与父亲身高 x（单位：cm）之间的关系及存在的遗传规律，随机抽取了5对父子的身高数据，如下表：

父亲身高 x	160	170	175	185	190
儿子身高 y	170	174	175	180	186

参考数据及公式：$\sum_{i=1}^{5}x_i=880$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=155450$，$\sum_{i=1}^{5}y_i=885$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=156045$，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$

(1)根据表中数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程;
(2)小明的父亲身高 178cm，请你利用回归直线方程预测小明成年后的身高。

【答案】(1) $\hat{y}=0.5x+89$，规律见解析

(2)178cm

【详解】（1）$\overline{x}=\frac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}x_i=\frac{1}{5}\times880=176$，$\overline{y}=\frac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}y_i=\frac{1}{5}\times885=177$……………………..2 分

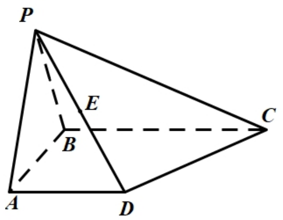
$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{156045-5\times176\times177}{155450-5\times176^2}=0.5$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=177-0.5\times176=89$，…………5 分

故回归方程为：$\hat{y}=0.5x+89$，………………………………………………………………7 分

（2）当 $x=178$ 时，$\hat{y}=0.5\times178+89=178cm$ …………………………………………………10 分

$\therefore$ 预测小明成年后的身高为 $178cm$ ……………………………………………..……………...12 分

18．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB\perp AD$，$AD//BC$，侧面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$，$PA=AB=AD=2$，$BC=4$，E 为 PD 的中点.



(1)求证：面 $PBC\perp$ 面 PAB；
(2)若二面角 $\angle PAB$ 的大小为 $60°$，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积.

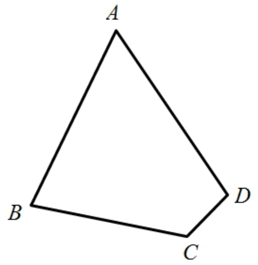
【答案】(1)证明见解析　(2) $\sqrt{3}$

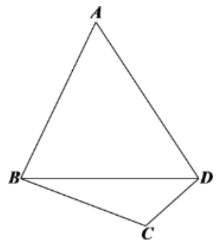
【详解】（1）$\because$ 侧面 $PAB\perp$ 面 $ABCD$，$AB\perp BC$，面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$
$\therefore BC\perp$ 面 PAB
$\therefore$ 面 $PBC\perp$ 面 PAB；……………………………………………...……………………………6 分

（2）$V_{E-ABCD}=\frac{1}{2}V_{P-ABCD}=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）为加强学生劳动教育，成都石室中学北湖校区将一块四边形园地 $ABCD$ 用于蔬菜种植实践活动. 经测量，边界 AB 与 AD 的长度都是 14 米，$\angle BAD=60^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$.

(1)若 DC 的长为 6 米，求 BC 的长；
(2)现需要沿实验园的边界修建篱笆以提醒同学们不要随意进入，问所需要篱笆的最大长度为多少米





【解析】(1)连接 BD，由题意△ABD 是等边三角形，所以 BD=14，

在△BCD 中，由余弦定理得，$|BD|^2=|BC|^2+|CD|^2-2|BC|\cdot|CD|\cos\angle BCD$

即 $|BC|^2+6|BC|-160=0$，求解得 $|BC|=10$（舍去 $|BC|=-16$）

故 BC 的长为 10 米.………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 $\angle BDC=\theta$，　$\angle CBD=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，

在△BCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin\angle C}=\dfrac{14}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{28}{\sqrt{3}}$，

所需篱笆的长度为

$f(\theta)=28+\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$

$=28+\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\left(\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)=28+\dfrac{28\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})\le 28+\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.……… 10 分

则当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，所需篱笆的最大长为 $28+\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ 米　………………………………………

20.（本小题满分 12 分）已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，抛物线 $C_2:y^2=4x$ 在第一象限与椭圆 C_1 交于点 A，点 F 为抛物线 C_2 的焦点，且满足 $|AF|=\dfrac{5}{3}$.

(1)求椭圆 C_1 的方程；

(2)设直线 $x=my+1$ 与椭圆 C_1 交于 P,Q 两点，过 P,Q 分别作直线 $l:x=t(t>2)$ 的垂线，垂足为 M、N，l 与 x 轴的交点为 T．若△PMT、△PQT、△QNT 的面积成等差数列，求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)由题意，$|AF|=x_M+1=\dfrac{5}{3}$,则点 $A\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 在椭圆上，

得 $\frac{4}{9a^2}+\frac{8}{3b^2}=1$，① $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$ 即 $3a^2=4b^2$ ②

联立①②，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，∴椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；…………………4 分

(2)依题意，直线 PQ 与 x 轴不重合，故可设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my+1\end{cases}$，消去 x：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），则有△>0，且 $y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$. 7 分

设△PMT，△PQT，△QNT 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，

∵S_1，S_2，S_3 成等差数列，∴$2S_2=S_1+S_3$，即 $3S_2=S_1+S_2+S_3$，

则 $3\times\frac{1}{2}(t-1)\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left[(t-x_1)+(t-x_2)\right]\times|y_1-y_2|$；

即 3（t－1）＝$2t$－（x_1+x_2），得 t＝3－（x_1+x_2），……………………………………9 分

又 x_1＝my_1+1，x_2＝my_2+2，

于是，t＝3－（my_1+my_2+2）＝1－m（y_1+y_2），∴ $t=1+\frac{6m^2}{3m^2+4}>2$，解得 $m^2>\frac{4}{3}$.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x-m$，其中 e 是自然对数的底数.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $m=1$，设关于 x 的不等式 $f(x)\le x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立时 k 的最大值为 $c\left(k\in\mathbf{R},n\in[1,\mathrm{e}]\right)$，求 c 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{m}{x}=\frac{x^2-mx+1}{x^2}$， 1 分

当 $m\le 2$ 时， $f'(x)\ge 0$， $x\in(0,+\infty), f(x)$ 单调递增；

当 $m>2$ 时， $f'(x)=\frac{x^2-mx+1}{x^2}=0$， $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}, x_2=\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，

$f'(x)>0, x\in(0,x_1),(x_2,+\infty), f(x)$ 单调递增； $f'(x)<0, x\in(x_1,x_2), f(x)$ 单调递减； 4 分

综上，当 $m\le 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $m>2$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}),(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2},+\infty)$ 单调递增，在 $(\frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2},\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2})$ 单调递减.

……………………………………………………………………………………………5 分

(2)因为 x 的不等式 $f(x)\le x\ln x-\frac{1}{x}-kx+n$ 对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立,

则 $k\le\frac{(1+\ln x)-x+x\ln x+n}{x}$，对 $\forall x\in[1,\mathrm{e}]$ 恒成立,……………………………………6 分

令 $g(x)=\dfrac{1+\ln x-x+x\ln x+n}{x}$，

即 $g'(x)=\dfrac{-\ln x+x-n}{x^2}$，令 $p(x)=-\ln x+x-n$，即 $p'(x)=-\dfrac{1}{x}+1>0$，

所以 $p(x)$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上递增；…………………………………………………………… 7 分

①当 $p(1)\geq 0$，即 $n\leq 1$ 时，因为 $n\in[1,\mathrm{e}]$，所以 $n=1$，

当 $x\in[1,\mathrm{e}]$， $p(x)\geq 0$，即 $g'(x)\geq 0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，

所以 $c=g(x)_{\min}=g(1)=n=1$；…………………………………………………………… 8 分

②当 $p(\mathrm{e})\leq 0$ 即 $n\in[\mathrm{e}-1,\mathrm{e}]$ 时，因为 $x\in[1,\mathrm{e}]$， $p(x)\leq 0$，即 $g'(x)\leq 0$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递减，所以 $c=g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=\dfrac{n+2}{\mathrm{e}}\in\left[\dfrac{e+1}{e},\dfrac{e+2}{e}\right]$；9 分

③当 $p(1)p(\mathrm{e})<0$，即 $n\in(1,\mathrm{e}-1)$ 时，因为 $p(x)=-\ln x+x-n$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上递增，

所以存在唯一实数 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $p(x_0)=0$，即 $n=x_0-\ln x_0$，

则当 $x\in(1,x_0)$ 时， $p(x)<0$，即 $g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\mathrm{e})$ 时， $p(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单减， (x_0,e) 上单增，所以 $c=g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{1+\ln x_0-x_0+x_0\ln x_0+n}{x_0}=\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}$，

设 $u(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}(x\in(1,\mathrm{e}))$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}>0$，

所以 $u(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上递增，所以 $c\in\left(1,1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

综上所述， $c\in\left[1,\dfrac{2}{\mathrm{e}}+1\right]$. …………………………………………………………… 12 分

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]

已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+4\cos\beta\\y=1+4\sin\beta\end{cases}$ (β 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数， α 为直线 l 的倾斜角)，l 与 C 交于 A，B 两点，

$|AB|=2\sqrt{14}$，求 l 的斜率.

【解析】(1)圆 C 的直角方程为 $(x+1)^2+(y-1)^2=16$ 将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$， $x^2+y^2=\rho^2$

得 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$.

故圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$……………………………………4 分

(2)在极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathrm{R})$，

设 A，B 所对应的极径分别为 ρ_1,ρ_2.

将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2+2\rho(\cos\theta-\sin\theta)-14=0$.

于是 $\rho_1+\rho_2=\sin\alpha-\cos\alpha,\rho_1\rho_2=-14$

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{57-\sin2\alpha}=2\sqrt{14}$

得 $\sin2\alpha=1,2\alpha=\dfrac{\pi}{2},\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 所以 l 的斜率为 1.……………………………………………………10 分

23．已知函数 $f(x)=|x-2|$.

(1)求不等式 $f(x)\geq 2x-5$ 的解集；

(2)若 $f(x)\geq 3-|x+a|$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $(-\infty,3]$

(2) $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

【分析】（1）绝对值不等式分类讨论求解即可得；

（2）双绝对值不等式恒成立问题，借助绝对值三角不等式，将原问题转化即可得.

【详解】（1） $f(x)\geq 2x-5$ 等价于 $\begin{cases}x-2\geq 0\\x-2\geq 2x-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-2<0\\-(x-2)\geq 2x-5\end{cases}$，

解得 $2\leq x\leq 3$ 或 $x<2$，

即 $x\leq 3$，即不等式 $f(x)\geq 2x-5$ 的解集为 $(-\infty,3]$； ……………………………………………………5 分

（2） $f(x)\geq 3-|x+a|$ 恒成立，即 $|x-2|+|x+a|\geq 3$ 恒成立，

因为 $|x-2|+|x+a|\geq|x-2-(x+a)|=|2+a|$，

所以 $|2+a|\geq 3$，解得 $a\geq 1$ 或 $a\leq -5$，

即 a 的取值范围是 $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$ ……………………………………………………10 分