

绝密★启用前

# 金科大联考·2024届高三1月质量检测

## 数 学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

### 注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{N}^+ | x^2 - 5x + 6 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x-1| < 2\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$                       B.  $\{0, 1, 2\}$   
 C.  $\{1, 2\}$                                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. 已知  $a \in \mathbb{R}$ , 若  $z = a - 1 + (a+1)i$  为纯虚数, 则  $|z+1| =$   
 A.  $\sqrt{2}$                                       B.  $\sqrt{5}$                                       C.  $2\sqrt{2}$                                       D.  $\sqrt{10}$
3. 设  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , 若  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{2}$ , 则  $\sin \alpha =$   
 A.  $-\frac{4}{5}$                                       B.  $-\frac{3}{5}$                                       C.  $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$                                       D.  $-\frac{1}{3}$
4. 已知  $a, b, c$  为不共线的平面向量,  $|b| = |c|$ , 若  $a + b + c = 0$ , 则  $b$  在  $a$  方向上的投影向量为  
 A.  $\frac{1}{4}a$                                       B.  $-\frac{1}{4}a$                                       C.  $\frac{1}{2}a$                                       D.  $-\frac{1}{2}a$
5. 设函数  $f(x) = a^x - a \ln x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是  
 A.  $[e, +\infty)$                                       B.  $[e^2, +\infty)$   
 C.  $[2e, +\infty)$                                       D.  $[e^e, +\infty)$
6. 第 19 届亚运会在杭州举行, 为了弘扬“奉献, 友爱, 互助, 进步”的志愿服务精神, 5 名大学生将前往 3 个场馆 A, B, C 开展志愿服务工作. 若要求每个场馆都要有志愿者, 则当甲不去场馆 A 时, 场馆 B 仅有 2 名志愿者的概率为  
 A.  $\frac{3}{5}$                                       B.  $\frac{21}{50}$                                       C.  $\frac{6}{11}$                                       D.  $\frac{3}{4}$

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

记锐角  $\triangle ABC$  中内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $a = b \sin C + c \cos B$ 。

- (1) 求  $\tan A + \tan B - \tan A \tan B$  的值；
- (2) 若  $A + 2C = 2B$ ，且  $b = 1$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

18. (本小题满分 12 分)

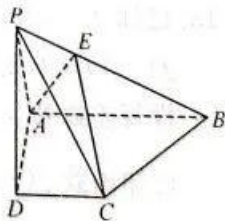
一个骰子各个面上分别写有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，现抛掷该骰子 2 次，记第一次正面朝上的数字为  $Y_1$ ，第二次正面朝上的数字为  $Y_2$ ，记不超过  $\frac{Y_1}{Y_2}$  的最大整数为  $Y$ 。

- (1) 求事件“ $Y=0$ ”发生的概率，并判断事件“ $Y_1=6$ ”与事件“ $Y=0$ ”是否为互斥事件；
- (2) 求  $Y$  的分布列与数学期望。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 2CD = 2AD = 2$ ， $E$  在棱  $PB$  上， $PD \parallel$  平面  $AEC$ ，设  $\frac{PE}{EB} = \lambda$ 。

- (1) 求  $\lambda$ ；
- (2) 若点  $A$  到平面  $PBC$  的距离为 1，求直线  $DE$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值。





20. (本小题满分 12 分)

设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$  为等比数列, 且  $\frac{2S_3}{S_4} - \frac{S_2}{S_3} = 1$ .

(1) 求数列  $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$  的通项公式; 来源: 高三答案公众号

(2) 已知  $a_1 = 1$ , 设  $b_n = \frac{S_{n+1}}{a_n}$ , 记  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 证明:  $T_n > 2^n + \frac{n}{2} - 1$ .

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$ , 过焦点  $F$  的直线  $l$  与  $\Gamma$  交于  $A, B$  两点, 且  $|AB|$  的最小值为 2.

(1) 求  $\Gamma$  的方程;

(2) 过  $F$  且与  $l$  垂直的直线交  $\Gamma$  于  $C, D$  两点, 设直线  $AB, CD$  的中点分别为  $M, N$ , 过坐标原点  $O$  作直线  $MN$  的垂线, 垂足为  $H$ , 是否存在定点  $P$ , 使得  $|PH|$  为定值, 若存在, 求出点  $P$  坐标, 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = (\ln x)^2 - a(x-1)^2, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $x=1$  是  $f(x)$  的极小值点, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

