西安中学 2023-2024 学年度第一学期期末考试
理科数学答案

一. 选择题（本大题共 12 小题，共 60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	A	B	D	A	B	C	B	C	C	D	D

二、填空题：(本大题共 4 小题，每小题 5 分)

13. 3　　14. $(x-1)^2+y^2=1$（答案不唯一，只要方程满足$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$即可）

15. $-\frac{7}{15}$　　16. ①③④

三、解答题（本大题共 7 小题，第 17—21 题为必考题，第 22、23 题为选考题）

（一）必考题：共 60 分

17.(1)证明：　（1）$\bar{x}=\frac{20+15+13+3+2+(-5)+(-10)+(-18)}{8}=\frac{5}{2}$,

$\bar{y}=\frac{56.5+3.5+3.5+1.5+0.5+(-0.5)+(-2.5)+(-3.5)}{8}=\frac{9}{8}$，　（2 分）

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{324-8\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{8}}{1256-8\times(\frac{5}{2})^2}=\frac{1}{4}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{9}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$，　（5 分）

故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$　（6 分）

（2）当树干高度为128cm 时，高度偏差 $x=128-120=8$ (cm)，　（8 分）

$\hat{y}=\frac{1}{4}\times8+\frac{1}{2}=2.5$(mm)，

所以树干直径约为 $2.5+31.5=34$(mm)，　（11 分）

即预测高度为128cm 的这种树苗的树干最大直径为 34 毫米.　（12 分）

18. （本小题满分 12 分）

（1）由已知及正弦定理得 $\sin A\cos B+\sin B\sin A=\sin C$，　（2 分）

$\because \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\because \sin B\sin A=\cos A\sin B$，

$\because \sin B\neq0\ \therefore \sin A=\cos A$　（4 分）

$\because A\in(0,\pi)$　$\therefore A=\frac{\pi}{4}$.　（6 分）

（2）$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{2}}{4}bc=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ $\therefore bc=2-\sqrt{2}$，（8 分）

又$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\therefore 2=(b+c)^2-\left(2+\sqrt{2}\right)bc$，（10 分）

所以$(b+c)^2=4,b+c=2$．（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）设椭圆的半焦距为c，因为椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$b=c$，$a=\sqrt{2}b$，

$\therefore$椭圆C的方程可设为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．（2 分）

易得$A\left(\sqrt{2},0\right)$，因为圆 O在点 A处的切线被椭圆 C截得的弦长为$2\sqrt{2}$，

所以点$\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$在椭圆上，

所以$\frac{2}{2b^2}+\frac{2}{b^2}=1$，

解得$\begin{cases}a^2=6\\b^2=3\end{cases}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$．（5 分）

（2）当过点P且与圆O相切的切线斜率不存在时，不妨设切线方程为$x=\sqrt{2}$，

由（1）知：$M\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，$N\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$，

则$\overrightarrow{OM}=(2,5)$，$\overrightarrow{ON}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，

$\therefore OM\perp ON$．（6 分）

当过点P且与圆O相切的切线斜率存在时，可设切线的方程为$y=kx+m$，

$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

因为直线与圆相切，

所以$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即$m^2=2\left(k^2+1\right)$．（7 分）

联立直线和椭圆的方程得$x^2+2(kx+m)^2=6$，

$\therefore \left(1+2k^2\right)x^2+4kx+2m^2-6=0$，

所以$\begin{cases}\Delta=(4km)^2-4(1+2k^2)(2m^2-6)>0\\ x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}\end{cases}$.　（8 分）

$\because \overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(x_2,y_2)$，

$\therefore \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$，

$=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$ ，

$=(1+k^2)\cdot\dfrac{2m^2-6}{2k^2+1}+km\cdot\dfrac{-4km}{2k^2+1}+m^2$ ，

$=\dfrac{(1+k^2)(2m^2-6)-4k^2m^2+m^2(2k^2+1)}{2k^2+1}$，$=\dfrac{3m^2-6k^2-6}{2k^2+1}=\dfrac{3(2k^2+2)-6k^2-6}{2k^2+1}=0$，

$\therefore OM\perp ON$.　（11 分）

综上所述，圆O上任意一点P处的切线交椭圆C于点M，N，都有$OM\perp ON$.　（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

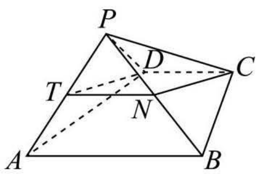
（1）设T是PA中点，连接TN,TD，如下图所示：

在$\triangle ABP$中，TN为为中位线，所以：$TN\parallel AB,TN=\dfrac{1}{2}AB$，　（2 分）

又因为：$CD\parallel AB,CD=\dfrac{1}{2}AB$，

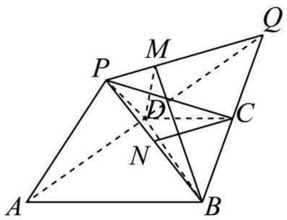
所以：$TN\parallel CD,TN=CD$，所以：四边形$CDON$为平行四边形，得：$TD\parallel CN,TD=CN$，

又因为：$CN\not\subset$平面$PAD,DT\subset$平面PAD，所以：$CN//$平面PAD.　（5 分）



（2）如图，延长AD和BC交于点Q，连接PQ.

过点B作$BM\perp PQ$，垂足为点M，连接DM.



因为：平面$PAD\perp$平面PBC，平面$PAD\cap$平面$PBC=PQ$，

所以：$BM\perp$平面BDM，（7分）

因为：$AD\perp BD, AD\perp BM, BD\cap BM=B$，且$BM,BD\subset$平面$BDM$，

所以：$AD\perp$平面BDM，所以：$\angle BDM$为所求二面角的平面角，（8分）

在$\triangle PDQ$中，$PQ=\sqrt{PD^2+DQ^2-2PD\cdot DQ\cos\angle PDQ}=\sqrt{5}$，

得：$\cos\angle PQD=\dfrac{PQ^2+DQ^2-PQ^2}{2PQ\cdot DQ}=\dfrac{5+2-1}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，

所以：$DM=DQ\tan\angle PQD=\dfrac{\sqrt{2}}{3}, MB=\dfrac{4}{3}$，（11分）

所以：$\sin\angle BDM=\dfrac{BM}{BD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.（12分）

21．（本小题满分12分）

(1)解：$\because f'(x)=\dfrac{3-x^2}{(1-x)^2}e^x$，

$\therefore f(0)=1$，$f'(0)=3$，

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$3x-y+1=0$.（5分）

(2)证明：由$f(x)+g(x)=0$存在两个正实数根$x_1,x_2(x_1<x_2)$，

整理得方程$e^x=a(x-1)(x\neq1)$存在两个正实数根$x_1,x_2(x_1<x_2)$.

由$a>0$，知$x_2>x_1>1$，

令$h(x)=e^x-ax+a$，则$h'(x)=e^x-a$，

当$x>\ln a$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增；

当$x<\ln a$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,\ln a)$上单调递减.

所以$h(x)_{\min}=h(\ln a)=2a-a\ln a$.

因为$h(x)=e^x-ax+a$有两个零点，即$2a-a\ln a<0$，得$a>e^2$.　　（7分）

因为实数x_1，x_2是$e^x=a(x-1)$的两个根，

所以$\begin{cases}e^{x_1}=a(x_1-1)\\e^{x_2}=a(x_2-1)\end{cases}$，从而$\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=e^{x_1-x_2}=\dfrac{x_1-1}{x_2-1}$.

令$\alpha=x_1-1$，$\beta=x_2-1$，则$e^{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta}$，变形整理得$\dfrac{\ln\alpha-\ln\beta}{\alpha-\beta}=1$.

要证$x_1x_2<x_1+x_2$，则只需证$\alpha\beta<1$，即只要证$\beta<\dfrac{1}{\alpha}(0<\alpha<1<\beta)$，

结合对数函数$y=\ln x$的图象可知，只需要证$(\alpha,\ln\alpha)$，$\left(\dfrac{1}{\alpha},\ln\dfrac{1}{\alpha}\right)$两点连线的斜率要比$(\alpha,\ln\alpha)$，$(\beta,\ln\beta)$两点连线的斜率小即可.

因为$\dfrac{\ln\alpha-\ln\beta}{\alpha-\beta}=1$，所以只要证$\dfrac{\ln\alpha-\ln\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}<1$，

整理得$\dfrac{1}{\alpha}-\alpha+2\ln\alpha>0(0<\alpha<1)$.　　（10分）

令$g(x)=\dfrac{1}{x}-x+2\ln x(0<x<1)$，则$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{2}{x}=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，即$g(x)>g(1)=0$，

所以$\dfrac{1}{\alpha}-\alpha+2\ln\alpha>0(0<\alpha<1)$成立，故$x_1x_2<x_1+x_2$成立.　　（12分）

（二）选考题：共10分.请考生在22、23题中任选一题作答.如果多做则按所做第一题计分

22. （本小题满分10分）

解：（1）由题意，

在$C_1:\begin{cases}x=\sin\alpha\\y=\sqrt{3}\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）中，化为普通方程为$\dfrac{y^2}{3}+x^2=1$　　（3分）

在$C_2:\rho\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}$中，$\rho\cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4}-\rho\sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$，

$\because x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，

$\therefore C_2:x-y-4=0$.　　（5分）

（2）由题意及（1）得，

设点$P\left(\sin\alpha,\sqrt{3}\cos\alpha\right)$，则$P$到直线$x-y-4=0$的距离为：

$$d=\frac{\left|\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|2\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})-4\right|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}],\qquad（8分）$$

当且仅当$\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})=1$，即$\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，$\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$时，

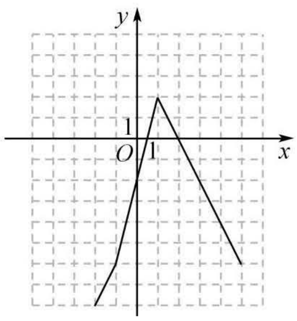
$|PQ|_{\min}=\sqrt{2}$，此时$P\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.　　（10分）

23. （本小题满分10分）

解：（1）已知$f(x)=|x+1|-3|x-1|$，

则$f(x)=\begin{cases}2x-4,x\le-1,\\4x-2,-1<x<1,\\-2x+4,x\ge1,\end{cases}$　　（3分）

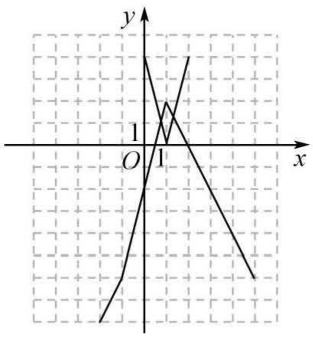
则$f(x)$的图象如图所示：



由$f(x)$的图象可知$f(x)$的值域为$(-\infty,2]$.　　（5分）

（2）由$f(x)=0$，解得$x=\frac{1}{2}$,或$x=2$,　　（6分）

由$|4x-a|=0$，解得$x=\frac{a}{4}$. $y=|4x-a|=\begin{cases}-4x+a,x<\frac{a}{4},\\4x-a,x\ge\frac{a}{4},\end{cases}$，如下图，



（8 分）

若存在x，使得不等式$f(x)\ge|4x-a|$成立，

则由图象可知，$\frac{1}{2}\le\frac{a}{4}\le2$，解得$2\le a\le8$

求实数a的取值范围$[2,8]$.　　　　（10 分）