24 届高三年级 TOP 二十名校调研考试九·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　由题意得 $M=\left\{y\left|y\geqslant\frac{1}{2}\right.\right\}$，$N=\{x|x<1\}$，所以 $M\cap N=\left\{x\left|\frac{1}{2}\leqslant x<1\right.\right\}$. 故选 C.

2. B　由 $(1+\mathrm{i})z=5\mathrm{i}-z$，得 $(2+\mathrm{i})z=5\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{5\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{5\mathrm{i}\cdot(2-\mathrm{i})}{5}=1+2\mathrm{i}$，所以 $|z-1|=|(1+2\mathrm{i})-1|=2$. 故选 B.

3. A　由题意知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，所以存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，所以 $(\lambda,2\lambda-\mu,\mu)=(2,3,m)$，所以 $\begin{cases}\lambda=2,\\2\lambda-\mu=3,\\\mu=m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\\mu=1,\\m=1.\end{cases}$ 故选 A.

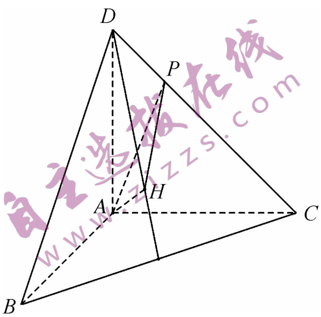
4. B　因为 $\tan 8^\circ+\tan 127^\circ+\tan 8^\circ\tan 233^\circ=\tan 8^\circ-\tan 53^\circ+\tan 8^\circ\tan 53^\circ=\tan(8^\circ-53^\circ)(1+\tan 8^\circ\tan 53^\circ)+\tan 8^\circ\tan 53^\circ=-1$. 故选 B.

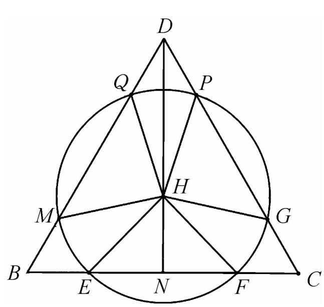
5. D　等比数列 $-1,-2,-4,-8$，其公比 $q=2>1$，但该数列是递减数列，故“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 是递增数列”的不充分条件；数列 $-4,-2,-1,-\frac{1}{2}$ 为递增的等比数列，但其公比为 $q=\frac{1}{2}$，故“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 是递增数列”的不必要条件，故“$q>1$”是“$\{a_n\}$ 是递增数列”的既不充分又不必要条件. 故选 D.

6. D　设四棱台的高度为 h，在图 1 中，中间液面四边形的边长为 4，在图 2 中，中间液面四边形的边长为 5，则 $V_1=\frac{1}{3}(36+16+\sqrt{36\times16})\cdot\frac{h}{2}=\frac{38h}{3}$，$V_2=\frac{1}{3}(4+25+\sqrt{4\times25})\cdot\frac{3h}{4}=\frac{39h}{4}$，所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{152}{117}$. 故选 D.

7. A　因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，所以 $a+b=ab$，又 $ac+bc-ab=c$，所以 $(a+b)c-ab=c$，所以 $(a+b)c-(a+b)=c$，所以 $\frac{c}{c-1}=a+b$，又 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant4$，当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立，所以 $\frac{c}{c-1}\geqslant4$，所以 $1<c\leqslant\frac{4}{3}$. 故选 A.

8. C　由题意知三棱锥 $A-BCD$ 为正三棱锥，故顶点 A 在底面 BCD 的射影为 $\triangle BCD$ 的中心 H，连接 AH，由 $V_{\text{三棱锥}D\text{-}ABC}=V_{\text{三棱锥}A\text{-}BCD}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AH$，所以 $AH=\sqrt{3}$，因为球的半径为 $\sqrt{6}$，所以截面圆的半径 $r=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$，所以球面与底面 BCD 的交线是以 H 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆在 $\triangle BCD$ 内部部分，如图所示. 易求 $HN=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $EF=2\sqrt{(\sqrt{3})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$，易得 $\angle EHF=\frac{\pi}{2}$，所以 $\angle MHQ=\angle GHP=\frac{\pi}{2}$，所以交线长度和为 $2\pi\times\sqrt{3}-3\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. 故选 C.



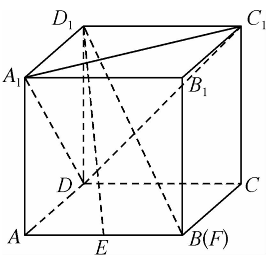


9. AC　由线面平行的判定定理可知 A 正确；由线面垂直的判定定理知，缺少了直线相交这个条件，故结论不一定成立，故 B 错误；若 c 与 a,b 均不相交，可得 $a/\!/c/\!/b$，这与 a,b 异面相矛盾，故 c 至少与 a,b 中的一条相交，故 C 正确；三个交点可能在 β 两侧，这时两平面不平行，故 D 错误. 故选 AC.

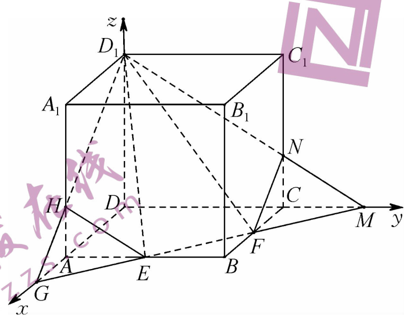
10. CD　因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+m+1=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+m+1$，因为相邻两条对称轴之间的距离

为$\frac{\pi}{2}$，所以其最小正周期为 π，所以 $\omega=1$，又 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 2$，所以 $f(x)_{\min}\geqslant 2$，即 $-2+m+1\geqslant 2$，所以 $m\geqslant 3$，故 A 错误；对于 B，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$，显然 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 不是其子集，故 B 错误；对于 C，平移后得到图象的函数解析式为 $y=2\cos 2x+m+1$，为偶函数，故其图象关于 y 轴对称，故 C 正确；对于 D，因为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+m+1$，当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)$ 取得最大值，故 D 正确. 故选 CD.

11\. AC　由 $g(x)$ 为偶函数，得 $g(-x)=g(x)$，两边求导，得 $-g'(-x)=g'(x)$，所以 $g'(x)$ 为奇函数，所以 $g'(0)=0$，由 $f(x)+g'(x)=3$ 及 $f(x)-g'(2-x)=3$，得 $g'(x)+g'(2-x)=0$，所以 $g'(x)=g'(x-2)$，故 $g'(x)$ 的周期为 2，所以 $g'(8)=g'(-6)=g'(0)=0$，又 $f(8)+g'(8)=3$，所以 $f(8)=3$，故 A 正确，B 错误；由 $f(x)+g'(x)=3$，得 $f(-1)+g'(-1)=3$，$f(3)+g'(3)=3$，又 $g'(x)+g'(2-x)=0$，所以 $g'(-1)+g'(3)=0$，所以 $f(-1)+f(3)=6$，故 C 正确；由 $f(x)+g'(x)=3$，得 $f(3)+g'(3)=3$，所以 $g'(-3)-f(3)=g'(-3)-3+g'(3)=-3$，故 D 错误. 故选 AC.



12\. ABD　由正方体的性质知，$D_1B\perp$ 平面 A_1C_1D，若点 F 不与 B 重合，因为 $D_1F\perp$ 平面 A_1C_1D，则 $D_1F/\!/D_1B$，与 $D_1F\cap D_1B=D_1$ 矛盾，故当 $D_1F\perp$ 平面 A_1C_1D 时，点 F 与 B 重合，故 A 正确；因为 $D_1P=\sqrt{5}$，则动点 P 的轨迹是以点 C_1 为圆心，以 1 为半径的圆的$\frac{1}{4}$，故其长度为$\frac{\pi}{2}$，故 B 正确；对于 C，以点 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图所示，则 $A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，所以 $\overrightarrow{C_1E}=(2,-1,-2)$，$\overrightarrow{D_1E}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2)$. 设平面 C_1D_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，平面 A_1D_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{C_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_1-y_1-2z_1=0,\\ 2x_1+y_1-2z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，解得 $y_1=0$，$z_1=1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$，同理结合 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{D_1E}=0\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$. 因为 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以平面 C_1D_1E 与平面 A_1D_1E 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 C 错误；对于 D，过 E，F 的直线分别交 DA、DC 的延长线于点 G，M，然后再分别连接 D_1M、D_1G，交侧棱 A_1A 于点 H，交侧棱 C_1C 于点 N，连接 EH 和 NF，如图所示：

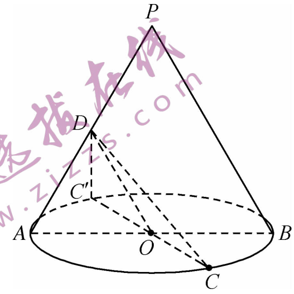


则得截面为五边形 D_1HEFN，易求 $D_1G=D_1M=\sqrt{13}$，$GM=3\sqrt{2}$，$GE=\sqrt{2}$，$GH=\frac{\sqrt{13}}{3}$，$\cos\angle D_1GM=\frac{\frac{1}{2}\times GM}{D_1G}=\frac{3}{\sqrt{26}}$，故 $\sin\angle D_1GM=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$，所以 $S_{\triangle D_1GM}=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$，$S_{\triangle GEH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{3}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{17}}{6}$，所以五边形 D_1HEFN 的面积 $S=S_{\triangle D_1GM}-2S_{\triangle GEH}=\frac{3\sqrt{17}}{2}-2\times\frac{\sqrt{17}}{6}=\frac{7\sqrt{17}}{6}$，故 D 正确. 故选 ABD.

13. $-\frac{9}{2}$　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $2x+9=0$,所以 $x=-\frac{9}{2}$.

14. $3x-y=0$　$f'(x)=(x+1)e^x+2\cos x$,所以 $f'(0)=3$,又 $f(0)=0$,故所求切线方程为 $y-0=3(x-0)$,即 $3x-y=0$.

15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$或$\frac{\sqrt{10}}{2}$　连接 OD,则 $OD/\!/PB$,所以$\angle COD$为异面直线 OC 与 PB 所成的角或其补角,所以 $\cos\angle COD=\frac{1}{4}$,或 $\cos\angle COD=-\frac{1}{4}$. 当 $\cos\angle COD=\frac{1}{4}$时,$CD=\sqrt{OC^2+OD^2-2OC\cdot OD\cos\angle COD}=\sqrt{1+1-2\times1\times1\times\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,当 $\cos\angle COD=-\frac{1}{4}$ 时,$CD=\sqrt{OC^2+OD^2-2OC\cdot OD\cos\angle COD}=\sqrt{1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,所以 $CD=\frac{\sqrt{6}}{2}$或$\frac{\sqrt{10}}{2}$.



16. $\begin{cases}1,n=1,\\3\times2^{n-2},n\geqslant2\end{cases}$(2 分)　$\left[-\frac{2}{5},+\infty\right)$(3 分)　由 $S_n=a_{n+1}-2$ 得,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=a_2-2$,所以 $a_2=3$;当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{n+1}-2-(a_n-2)=a_{n+1}-a_n$,所以 $a_{n+1}=2a_n$,又 $a_2=3$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\geqslant2)$,又 $\frac{a_2}{a_1}=3\neq2$,所以 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\3\times2^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时,$b_1=-\frac{2}{5}$,当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=(-1)^n\frac{3\cdot2^n+2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=(-1)^n\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$,当 n 为偶数时,$T_n=-\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}\right)-\left(\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2^{n+1}+1}$,显然,$T_n=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2^{n+1}+1}$($n\geqslant2$,$n$ 为偶数)单调递减,所以 $T_n\in\left(-\frac{1}{5},-\frac{4}{45}\right]$;当 n 为奇数时,若 $n=1$,则 $T_1=-\frac{2}{5}$,若 $n\geqslant3$,则 $T_n=-\frac{2}{5}+\left(\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}\right)-\left(\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{2^4+1}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$,显然 $T_n=-\frac{1}{5}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$($n\geqslant1$,$n$ 为奇数)单调递增,所以 $T_n\in\left[-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$. 综上所述 $m\geqslant-\frac{2}{5}$.

17. 证明:(1)连接 B_1C 交 BC_1 于点 E,则 E 为 B_1C 的中点,连接 D_1E,

因为 D_1 为 A_1B_1 的中点,所以 $D_1E/\!/A_1C$, ………………………… 2 分

又 $D_1E\subset$平面 BC_1D_1,且 $A_1C\not\subset$平面 BC_1D_1,

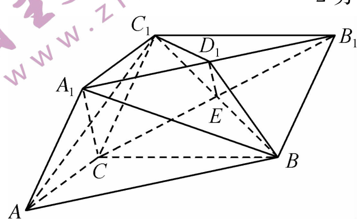
所以 $A_1C/\!/$平面 BC_1D_1. ………………………… 4 分

(2) 连接 AC_1,因为 $AA_1=AC$,所以四边形 ACC_1A_1 为菱形,

所以 $AC_1\perp A_1C$, ………………………… 5 分

又平面 $A_1BC\perp$平面 ACC_1A_1,平面 $A_1BC\cap$平面 $ACC_1A_1=A_1C$,

且 $AC_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $AC_1\perp$平面 A_1BC, ………………………… 7 分



又 $BC\subset$平面 A_1BC,所以 $AC_1\perp BC$, ………………………… 8 分

因为 $AC\perp BC$,$AC\cap AC_1=A$,AC,$AC_1\subset$平面 ACC_1A_1, ………………………… 9 分

所以 $BC\perp$平面 ACC_1A_1,

又 $AA_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $BC\perp AA_1$. ………………………… 10 分

18. 解:(1)由$(\sin A+\sin C)(a-c)=b(\sin A-\sin B)$及正弦定理,

得$(a+c)(a-c)=b(a-b)$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$, ………………………… 2 分

所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$, ………………………… 3 分

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 4 分

(2)方法一:因为 CD 平分$\angle ACB$,且 $AD=2DB$,

所以$\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB}=2$,则 $b=2a$,$AD=\frac{2}{3}c$,$BD=\frac{1}{3}c$, ………………………… 6 分

由 $\cos C=\frac{a^2+4a^2-c^2}{4a^2}=\frac{1}{2}$，得 $c=\sqrt{3}a$. ………… 7 分

又 $\cos\angle ACD=\frac{4a^2+4-\frac{4}{9}c^2}{8a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

将 $c=\sqrt{3}a$ 代入，可得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $a=\sqrt{3}$. ………… 9 分

当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$c=\frac{3}{2}$，则 $DB+CB=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}<2$，故舍去，所以 $a=\sqrt{3}$. ………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

方法二：因为 CD 平分 $\angle ACB$，且 $AD=2DB$，所以 $\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB}=2$，则 $b=2a$. ………… 5 分

因为 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，

所以 $\frac{1}{2}\times2\times b\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times2\times a\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}$，所以 $2a+2b=\sqrt{3}ab$， ………… 8 分

则 $6a=2\sqrt{3}a^2$，所以 $a=\sqrt{3}$， ………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

19. 解：(1)由题意得 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}=\sin 2x+\sqrt{3}(1+\cos 2x)-\sqrt{3}$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$， ………… 2 分

因为 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{10}{13}$，即 $2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{10}{13}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{13}$， ………… 3 分

所以 $f\left(2\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-2\cos 2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-2\left[2\cos^2\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1\right]=-2\left[2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2-1\right]=-2\times\left(-\frac{119}{169}\right)=\frac{238}{169}$. ………… 6 分

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

故 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos 2x+2\sin 2x-2\cos 2x\sin 2x$，

………… 8 分

令 $\sin 2x+\cos 2x=t$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $2\sin 2x\cdot\cos 2x=t^2-1$， ………… 9 分

所以 $y=2t-(t^2-1)=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2$，

所以当 $t=-\sqrt{2}$ 时，$y_{\min}=-2\sqrt{2}-1$，

所以函数 $g(x)$ 的最小值为 $-2\sqrt{2}-1$. ………… 12 分

20. (1)证明：因为 $CD\perp$ 平面 ABC，$AB,BC\subset$ 平面 ABC，所以 $CD\perp AB$，$CD\perp BC$， ………… 1 分

因为 $BE/\!/CD$，所以 $BE\perp AB$，$BE\perp BC$，又 $AB,BC\subset$ 平面 ABC，$AB\cap BC=B$，

所以 $BE\perp$ 平面 ABC. ………… 2 分

取 AB 的中点 O，连接 CO，则 $CO\subset$ 平面 ABC，所以 $BE\perp CO$，

又 $CA=CB$，所以 $CO\perp AB$， ………… 3 分

取 AE 的中点 M，连接 OM,DM，则 $OM/\!/BE$，且 $OM=\frac{1}{2}BE$，

又 $BE/\!/CD$，$CD=\frac{1}{2}BE$，所以 $CD/\!/OM$，且 $CD=OM$，

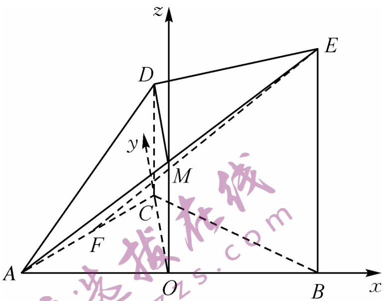
所以四边形 $OCDM$ 为平行四边形，所以 $DM/\!/CO$， ………… 4 分

所以 $DM\perp BE$，$DM\perp AB$，

又 $AB,BE\subset$ 平面 ABE，$AB\cap BE=B$，所以 $DM\perp$ 平面 ABE，

因为 $DM\subset$ 平面 ADE，所以平面 $ADE\perp$ 平面 ABE. ………… 6 分

(2)解：由(1)知 OC,OB,OM 两两垂直，以 O 为坐标原点，OB,OC,OM 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(-2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$D\left(0,2\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$，$E(2,0,3)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=(4,0,3)$. ………… 7 分



设平面 ACD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}z=0,\\ 2x+2\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，解得 $x=-\sqrt{3}$，$z=0$，所以 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,0)$.

………………………………………………………… 9 分

设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}=(2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0)$，所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=(2\lambda-4,2\sqrt{3}\lambda,-3)$， ………… 10 分

记 EF 与平面 ACD 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times\sqrt{(2\lambda-4)^2+(2\sqrt{3}\lambda)^2+(-3)^2}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$， ………… 11 分

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，故 F 为 AC 的中点，即 $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2}$.

所以在棱 AC 上存在点 F，使得 EF 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$，且 $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{2}$. ………… 12 分

21. (1)证明：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{6+a_1}{2}$，解得 $a_1=6$；………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=\frac{(n-1)(6+a_{n-1})}{2}$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(6+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(6+a_{n-1})}{2}$，………………………… 2 分

整理得 $(n-2)a_n+6=(n-1)a_{n-1}$，①

所以 $(n-1)a_{n+1}+6=na_n$，②

由①－②得 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，

因为 $a_1=6$，$a_4=12$，所以数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{12-6}{3}=2$，

所以 $a_n=2n+4$. ………………………………………………………… 4 分

设 $M_n=a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

则 $M_n=[2(n+1)+4][2(n+2)+4]-(2n+4)^2=12n+32$，

因为 $M_{n+1}-M_n=12(n+1)+32-(12n+32)=12$(常数)，

所以数列 $\{a_{n+1}a_{n+2}-a_n^2\}$ 是等差数列. ………………………………… 5 分

解：(2)设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，结合(1)及已知得 $b_1=a_1-4=2$，$b_4=b_1q^3=16$，

解得 $q=2$，所以 $b_n=2^n$. ………………………………………………… 7 分

(3)由(1)(2)，得 $c_n=\frac{n+1}{2^n}$，所以 $T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n+1}{2^n}$，①

又 $\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$，②

①－②，得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=1+\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$，

所以 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$， ………………………………………… 9 分

由 $T_n+\frac{\lambda}{n+1}\geqslant 3$，解得 $\lambda\geqslant\frac{(n+1)(n+3)}{2^n}$. ……………………………… 10 分

设 $f(n)=\frac{(n+1)(n+3)}{2^n}$，则 $f(n+1)=\frac{(n+2)(n+4)}{2^{n+1}}$，

故 $f(n+1)-f(n)=\frac{(n+2)(n+4)}{2^{n+1}}-\frac{(n+1)(n+3)}{2^n}=\frac{-n^2-2n+2}{2^{n+1}}$，

因为$-n^2-2n+2\leqslant-1-2+2=-1<0$，

故 $f(n+1)-f(n)<0$ 恒成立，知 $f(n)$ 单调递减，

故 $f(n)$ 的最大值为 $f(1)=4$，则 $\lambda\geqslant4$，即 λ 的取值范围为$[4,+\infty)$. …… 12 分

22.(1)解：$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$，

由 $f(x)=2\ln x-ax+1\leqslant0$，得 $a\geqslant\dfrac{2\ln x+1}{x}$， …… 1 分

令 $u(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$，则 $u'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$， …… 2 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$u'(x)>0$，函数 $u(x)$ 在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，

当 $x>\sqrt{e}$ 时，$u'(x)<0$，函数 $u(x)$ 在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，

所以 $u(x)_{\max}=u(\sqrt{e})=\dfrac{2}{\sqrt{e}}=\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$， …… 3 分

所以 $a\geqslant\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$，所以实数 a 的取值范围为$\left[\dfrac{2\sqrt{e}}{e},+\infty\right)$. …… 4 分

(2)证明：由题意知 $g(x)=x^2-ax+2\ln x$，故 $g'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-ax+2}{x}(x>0)$，

令 $g'(x)=0$，则 $2x^2-ax+2=0$，

当 $\Delta=a^2-16\leqslant0$，即 $-4\leqslant a\leqslant4$ 时，$g'(x)\geqslant0$，

此时 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，不存在极值点. …… 6 分

当 $\Delta=a^2-16>0$，即 $a<-4$ 或 $a>4$ 时，

若 $a>4$，则方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两根为 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$，

此时两根均为正数，且 $x_1<x_2$，

则 $x\in\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$ 或 $x\in\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，

此时 $f(x)$ 在$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$上均单调递增；

$x\in\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 在$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$上单调递减，

此时函数 $g(x)$ 存在两个极值点； …… 7 分

若 $a<-4$，则 $g'(x)>0$ 恒成立，$g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，此时不存在极值点.

故当 $a>4$ 时，$g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{a}{2},\\x_1x_2=1,\end{cases}$所以 $a=2(x_1+x_2)$，$x_1=\dfrac{1}{x_2}$， …… 8 分

又 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$，

故 $2g(x_1)-g(x_2)=2(x_1^2-ax_1+2\ln x_1)-(x_2^2-ax_2+2\ln x_2)$

$=2x_1^2-2ax_1+4\ln x_1-x_2^2+ax_2-2\ln x_2$

$=2x_1^2-4(x_1+x_2)x_1+4\ln x_1-x_2^2+2(x_1+x_2)x_2-2\ln x_2$

$=-2x_1^2-2+4\ln x_1+x_2^2-2\ln x_2=-\dfrac{2}{x_2^2}+x_2^2-6\ln x_2-2$， …… 9 分

令 $\varphi(x)=x^2-\dfrac{2}{x^2}-6\ln x-2$，$x>1$，则 $\varphi'(x)=2x+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{2x^4-6x^2+4}{x^3}$，

$=\dfrac{2(x^4-3x^2+2)}{x^3}=\dfrac{2(x^2-1)(x^2-2)}{x^3}=\dfrac{2(x+1)(x+\sqrt{2})(x-1)(x-\sqrt{2})}{x^3}$， …… 10 分

则当 $x\in(1,\sqrt{2})$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在$(1,\sqrt{2})$上单调递减，

当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增， …… 11 分

则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-\dfrac{2}{(\sqrt{2})^2}-6\ln\sqrt{2}-2=-1-3\ln 2$，

故 $2g(x_1)-g(x_2)\geqslant-1-3\ln 2$. …… 12 分