三重教育2023-2024学年第一学期高三年级联考

数学试题参考答案

一、选择题

1. B　2. A　3. B　4. A　5. D　6. B　7. C　8. C

二、选择题

9. BCD　10. BD　11. AD　12. ABD

三、填空题

13. $\sqrt{7}$　14. $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$　15. 2　16. $e+\frac{1}{e}$或$8+e^3+\frac{1}{e^3}$

四、解答题

17. 解：(1)由$\begin{cases}3S_{n+1}=2S_n-2,\\3S_n=2S_{n-1}-2\end{cases}(n\geq 2)$，两式作差，得$3a_{n+1}=2a_n(n\geq 2)$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}(n\geq 2)$，--------------2分

当$n=1$时，$3S_2=2S_1-2$，即$3(a_1+a_2)=2a_1-2$，将$a_1=-\frac{2}{3}$代入，解得$a_2=-\frac{4}{9}$，则$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以$\{a_n\}$是以$-\frac{2}{3}$为首项，$\frac{2}{3}$为公比的等比数列，--------------4分

[illegible] $=-\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$. --------------5分

(2)$b_n=\log$ [illegible] $=a_n+b_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n-n$. --------------7分

[illegible]

$=-\left[\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]-(1+2+3+\cdots+n)$ --------------8分

$=-\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}-\frac{n(n+1)}{2}$

$=-2+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{n^2+n}{2}=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{n^2+n+4}{2}$. --------------10分

18. 解：(1)设$\angle BAD=\angle CAD=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\sin\theta+\frac{1}{2}c\sin\theta=\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即$\frac{1}{2}(b+c)\sin\theta=\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，--------------2分

因为$b+c=\frac{16}{3}$，得$\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，--------------3分

所以$\theta=\frac{\pi}{3}$，则$\frac{1}{2}bc\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$bc=\frac{16}{3}$．--------------4分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 2\theta=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc=\frac{208}{9}$，

得$a=\frac{4\sqrt{13}}{3}$，--------------5分

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\frac{16+4\sqrt{13}}{3}$．--------------6分

(2)设$\angle BAD=\angle CAD=\theta$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由$\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{BD}$，得$b=3c$，--------------7分

又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\sin\theta+\frac{1}{2}c\sin\theta=\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

所以$2c\sin\theta=3c^2\sin\theta\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，--------------8分

解得 $\tan\theta=\sqrt{3}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，所以 $2c\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 $c=\frac{4}{3}$. --------------------------------10分

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即 $\frac{1}{\sin B}=\frac{\frac{4}{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)}$. --------------------------11分

解得 $\tan B=\frac{3\sqrt{3}}{5}$. --12分

19. **解**：(1)填写列联表如下：

	评价满意	评价不满意	合计
北京	100	400	500
太原	200	300	500
合计	300	700	1000

--2分

零假设为 H_0：评价满意与否和分公司所在地相互独立，即两个分公司的评价满意没有差异.

根据列联表中的数据，经计算得到：

$\chi^2=\frac{1000\times(100\times300-200\times400)^2}{300\times700\times500\times500}\approx47.619>2.706$，--4分

[illegible]概率值 $\alpha=0.1$ 的 χ^2 独立性检验，有充分证据推断 H_0 不成立，所以认为评价满意与否和分公司所在地有[illegible]. --5分

(2)[illegible] ξ [illegible]值为0,1,2,3,4. --6分

$P(\xi=0)=$ [illegible] $\times0.8$ [illegible] $\frac{8}{75}$; --7分

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}\times0.8$ [illegible] $\frac{C_2^2}{C_4^2}$ [illegible] $0.8\times0.2=\frac{12}{25}$; ------------------------------8分

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\times0.8^2+\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}\times C_2^1\times0.8\times0.2+\frac{C_2^2}{C_4^2}$ [illegible] 0.2 [illegible] $\frac{49}{150}$; ----------9分

$P(\xi=3)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}\times0.2^2+\frac{C_2^2}{C_4^2}\times C_2^1\times0.8\times0.2=\frac{2}{25}$; ---------------------------10分

$P(\xi=4)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\times0.2^2=\frac{1}{150}$. --11分

所以 ξ 的分布列如下：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{8}{75}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{49}{150}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{150}$

--12分

20. (1)**证明**：如图，连接 OB、OC、OE、OP、AC，因为 $PA=PD$，O 为 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp BO$. ------------1分

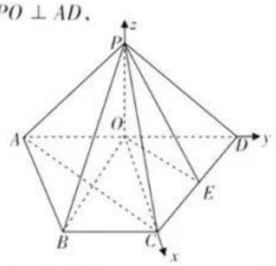
因为 E、O 分别为 CD、AD 的中点，所以 $OE\parallel AC$，

易证四边形 $ABCO$ 为正方形，所以 $AC\perp BO$，则 $BO\perp EO$，----3分

又 $PO\cap EO=O$，PO、$EO\subset$ 平面 POE，所以 $BO\perp$ 平面 POE .

--------------------------4分

又 $PE\subset$ 平面 POE，所以 $BO\perp PE$. --------------------------5分



(2)**解**：由(1)知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCO$ 为正方形，则 $PO\perp OC$，$OC\perp OD$，以 O 为原点，OC、OD、OP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. --------------------------------6分

设 $OC=OA=OP=a$，则 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(a+2a)a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $a=\sqrt{3}$，------------------------------7分

因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以直线 PM 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PMO$，则 $\angle PMO=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\tan\angle PMO=\frac{OP}{MO}=\sqrt{3}$，则 $MO=1$．

所以点 M 的轨迹是以 O 为圆心，1 为半径，在底面 $ABCD$ 内的半圆弧，

则可设 $M(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)\left(\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$．--8分

由 $P(0,\ 0,\sqrt{3})$，$A(0,\ -\sqrt{3},\ 0)$，$C(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，得 $\overrightarrow{PM}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},\sqrt{3},\ 0)$，

$\overrightarrow{AP}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+\sqrt{3}y=0,\\ \sqrt{3}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\ -1,\ 1)$，--9分

设直线 PM 与平面 PAC 所成角为 β，

则 $\sin\beta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PM}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PM}|}=\frac{|\cos\alpha-\sin\alpha-\sqrt{3}|}{2\sqrt{3}}=\frac{\left|\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{3}}$，----------------10分

[illegible] $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$ 为所求最小值．------------------------------12分

21．(1)证明：[illegible]椭圆的半焦距)，

联立 $\begin{cases}x=my-c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(b^2m$ [illegible]，----------------------------1分

则 $\Delta=4a^2b^4(1+m^2)>0$，

设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{2b^2cm}{b^2m^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{-b}{b^2m^2+a^2}$，-------[illegible]

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{2ab^2\sqrt{1+m^2}}{b^2m^2+a^2}=\frac{2ab^2(1+m^2)}{b^2m^2+a^2}$．-------------------[illegible]

由题意知，直线 l' 的方程为 $x=my$，

联立 $\begin{cases}x=my,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(b^2m^2+a^2)y^2=a^2b^2$，则 $y=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2m^2+a^2}}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{2ab}{\sqrt{b^2m^2+a^2}}$，$|AB|^2=\frac{4a^2b^2(1+m^2)}{b^2m^2+a^2}$，------------------------------------4分

所以 $\frac{|AB|^2}{|PQ|}=2a$．--5分

(2)解：当直线 l 的斜率为0时，P，Q 分别为椭圆的右端点与左端点，则 $\lambda=-\frac{a}{a+c}$，$\mu=-\frac{a}{a-c}$，$\mu+\lambda=-\frac{2a^2}{b^2}$．

---6分

当直线 l 的斜率不为0时，设直线 l 的方程为 $x=my-c$，则 $G\left(0,\frac{c}{m}\right)$，---------------------------7分

设 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，由(1)知 $y_1+y_2=\frac{2b^2cm}{b^2m^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{-b^4}{b^2m^2+a^2}$．

由 $\overrightarrow{GP}=\lambda\overrightarrow{PF_1}$，得 $\left(x_1,\ y_1-\frac{c}{m}\right)=\lambda(-c-x_1,\ -y_1)$，

则 $\lambda=-1+\frac{c}{my_1}$，同理 $\mu=-1+\frac{c}{my_2}$．--9分

所以$\mu+\lambda=-2+\frac{c}{m}\cdot\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=-2+\frac{c}{m}\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-2+\frac{c}{m}\cdot\frac{2b^2cm}{-b^4}=-2-\frac{2c^2}{b^2}=-\frac{2a^2}{b^2}$.----------11分

因为椭圆C的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,即$\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,所以$-\frac{2a^2}{b^2}=-8$,故$\mu+\lambda$为定值$-8$.--------12分

22. **解**:(1)函数$f(x)$的定义域为$(0,\ +\infty)$,

$f'(x)=1+\ln x-x-2a-1=\ln x-x-2a$.--1分

因为$f(x)$有两个极值点x_1, $x_2(x_1<x_2)$,所以$f'(x)=0$有两个不等的正根,

即$\ln x=x+2a$有两个不等的正根. --3分

设直线$y=x+p$与$y=\ln x$的图象相切,易得$p=-1$, --4分

所以$2a<-1$,解得$a<-\frac{1}{2}$,所以a的取值范围为$\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$. ------------------------------------5分

(2)由(1)知$a<-\frac{1}{2}$,$0<x_1<1<x_2$,

$\begin{cases}\ln x_1=x_1+2a,\\ \ln x_2=x_2+2a,\end{cases}$则$\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$. --7分

设$\frac{x_2}{x_1}=t$,则$t>1$,所以$x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}=\ln t$,$x_2=tx_1$, 则$\ln t=x_2-x_1=(t-1)x_1$,

得$x_1=\frac{\ln t}{t-1}$, $x_2=tx_1=\frac{t\ln t}{t-1}$, 所以$x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$.令$g(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}(t>1)$, ----------------9分

[illegible]$g'(t)=\frac{t-2\ln t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$[illegible].令$p(t)=t-2\ln t-\frac{1}{t}(t>1)$, 则$p'(t)=1-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$,

所以$p(t)$在$(1,\ +\infty)$上单调递[illegible]$p(1)$[illegible]$p(t)>0$,

则$g'(t)>0$,所以$g(t)$在$(1,\ +\infty)$上单调[illegible] ----------------------------------10分

易 知 $g(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$, $g(3)=2\ln 3$, [illegible]$=g(t)\in[g(\mathrm{e}),\ g(3)]$,

-- [illegible]分

所以$t\in[\mathrm{e},\ 3]$,即$\frac{x_2}{x_1}$的取值范围是$[\mathrm{e},\ 3]$------------------------------ [illegible]

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。