（四）

1. B　因为 $A=\{x|x=\frac{1}{2}+2k,k\in\mathbf{Z}\}$，而 $B=\{x|3x^2-14x-5\leqslant0\}=\{x|(3x+1)(x-5)\leqslant0\}=\{x|-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 5\}$，所以 $A\cap B=\{\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2}\}$. 故选 B.

2. A　因为 $z=\frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3}=\frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\frac{(\frac{1}{2}-\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=\frac{-\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}}{2}=-\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}}{4}$，所以 $\bar{z}=-\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}}{4}$. 故 $(\frac{3}{4}+\bar{z})^2=-\frac{1}{16}$. 故选 A.

3. D　由 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(-3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 可得 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(-3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，即 $-3\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 又因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$|\boldsymbol{a}|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{b}|$，故 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$. 故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$.

4. D　由椭圆定义知 $b=\sqrt{2}$. 将直线 $\sqrt{2}x-ay-\sqrt{2}a=0$ 变形为 $\frac{x}{a}-\frac{y}{\sqrt{2}}=1$，可知直线经过 $(a,0)$ 和 $(0,-b)$，由弦

长为 $2\sqrt{2}$ 知 $a^2+b^2=8$，故 $a=\sqrt{6}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6-2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

5. B　$f'(x)=\frac{-\sin x-\cos x-a}{e^x}$，因为函数 $f(x)=\frac{\cos x+a}{e^x}$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取得极值，所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，即 $\frac{-\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}-a}{e^{\frac{\pi}{2}}}=0$，解得 $a=-1$，经检验 $a=-1$ 符合题意，所以 $a=-1$. 故选 B.

6. A　因为 $\frac{a_{n+1}}{n+1}+\frac{2a_n}{n}=3\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{n+1}=-2\cdot\frac{a_n}{n}+3\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{n+1}-1=-2\cdot\frac{a_n}{n}+2=-2(\frac{a_n}{n}-1)\Rightarrow\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}-1}{\frac{a_n}{n}-1}=-2$.

又因为 $\frac{a_1}{1}-1=1$，所以数列 $\{\frac{a_n}{n}-1\}$ 为等比数列，首项为 1，公比为 -2.

所以 $\frac{a_n}{n}-1=(-2)^{n-1}$，故 $a_n=(-2)^{n-1}\cdot n+n$，有 $a_5=(-2)^{5-1}\times5+5=16\times5+5=85$. 故选 A.

7. C　因为 $f(x+1)$ 是偶函数，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，因为 $f(x+4)+f(-x)=4$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,2)$ 中心对称，所以函数 $f(x)$ 的周期为 4. 又当 $0<x\leqslant1$ 时，$f(x)=1-2^x$，所以 $a=f(1)=-1$，$b=f(3)=4-f(1)=5$，$c=f(\frac{2\ 023}{4})=f(126\times4+\frac{7}{4})=f(\frac{7}{4})=f(\frac{1}{4})=1-2^{\frac{1}{4}}$，有 $b>c>a$. 故选 C.

8. B　由已知可得 $|PQ|=\sqrt{(m-2)^2+(n-3)^2}$，令 $m-2=a$，$n-3=b$，则 $|PQ|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\because (m-2)^2+2(m-2)(n-3)-3(n-3)^2=16$，即 $a^2+2ab-3b^2=(a+3b)(a-b)=16$，设 $\begin{cases}x=a+3b\\y=a-b\end{cases}$，则 $xy=16$，且 $\begin{cases}a=\frac{x+3y}{4}\\b=\frac{x-y}{4}\end{cases}$，所以 $a^2+b^2=(\frac{x+3y}{4})^2+(\frac{x-y}{4})^2=\frac{x^2+2xy+5y^2}{8}\geqslant\frac{2xy+2\sqrt{x^2\cdot5y^2}}{8}=\frac{2\times16+2\sqrt{5\times16^2}}{8}$

$=\frac{32+32\sqrt{5}}{8}=4\sqrt{5}+4$，当且仅当 $x^2=5y^2$ 时等号成立，结合 $xy=16$，$x^2y^2=16^2$ 可知 $x^2=16\sqrt{5}$，$y^2=\frac{16\sqrt{5}}{5}$ 时等号成立. 故选 B.

9. BC　对于 A，极差不一定为 1 200，故 A 错误；

对于 B，在区间[1 400，1 800)的频率为 $\frac{18}{36}=0.5$，故 B 正确；

对于 C，计算得 $f_1=\frac{28}{36}\approx0.78$，$f_2=\frac{33}{36}\approx0.92$；故该城市每月新生儿数量的第 80%分位数在[1 800，2 000)区间，$1\ 800+200\times\frac{0.80-\frac{28}{36}}{\frac{33}{36}-\frac{28}{36}}=1\ 800+200\times\frac{0.8}{5}=1\ 832$，故 C 正确；

对于 D，$1\ 100\times\frac{4}{36}+1\ 300\times\frac{6}{36}+1\ 500\times\frac{11}{36}+1\ 700\times\frac{7}{36}+1\ 900\times\frac{5}{36}+2\ 100\times\frac{3}{36}\approx1\ 567$. 故 D 错误. 故选 BC.

10. AB　对于 A，由题得，圆 $(x-6)^2+y^2=36$①和 $(x-8)^2+(y-8)^2=100$②，

①−②得，两圆的公共弦 AB 所在直线方程为 $x+4y-7=0$. 故 A 正确；

对于 B，$M(6,0)$，$N(8,8)$，故直线 MN 的方程为 $y=\frac{8}{8-6}(x-6)\Rightarrow4x-y-24=0$. 故 B 正确；

对于 C，圆心 $(8,8)$ 到直线 AB：$x+4y-7=0$ 的距离 $d=\frac{|8+32-7|}{\sqrt{17}}=\frac{33\sqrt{17}}{17}$.

则点 P 到直线 AB 距离的取值范围为 $(0,10+\frac{33\sqrt{17}}{17}]$，故 C 错误；

对于 D，当点 P 到直线 AB 的距离最大时，$\angle APB=\frac{1}{2}\angle ANB$，

$\cos\angle APB=\frac{d}{|BN|}=\frac{33\sqrt{17}}{170}$，故 D 错误. 故选 AB.

11. BC　$x\odot x=\begin{cases}x-\frac{1}{x},\lg|x|\leqslant0\\x+\frac{1}{x},\lg|x|>0\end{cases}\Rightarrow x\odot x=\begin{cases}x-\frac{1}{x},x\in[-1,0)\cup(0,1]\\x+\frac{1}{x},x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$.

对于 A,因为 $\mu\in\mathbf{N}^*$,所以 $(\mu+1)^2\geqslant 4$. 又 $a\in(\frac{1}{4},1]$,所以 $(\mu+1)^2a>1$,

$(\mu+1)^2a\odot(\mu+1)^2a=(\mu+1)^2a+\frac{1}{(\mu+1)^2a}$,

$(\mu+1)^2(a\odot a)=(\mu+1)^2(a-\frac{1}{a})=(\mu+1)^2a-(\mu+1)^2\frac{1}{a}$,对于任意非零实数 a,两者不可能相等,故 A 错误;

对于 B,当 $a\in[-1,0)\cup(0,1]$时,$a\odot a=a-\frac{1}{a}=2$,解得 $a=1+\sqrt{2}$(舍去),$a=1-\sqrt{2}$.

当 $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$时,$a\odot a=a+\frac{1}{a}=2$,解得 $a=1$(舍去). 故 B 正确;

对于 C,$x\in(1,+\infty)$时,$y=x+\frac{1}{x}$ 单调递增,且 $y>2$;$x\in(0,1]$时,$y=x-\frac{1}{x}$ 单调递增,且 $y\leqslant 0$. 故存在 $a\in(0,1]$,$b\in(1,+\infty)$,使得 $a\odot a+b\odot b=0$ 成立. 故 C 正确;

对于 D,令 $a=1,b=2$,则有 $(a+b)\odot(a+b)=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$,$a\odot a+b\odot b=1-1+2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,故 D 错误. 故选 BC.

12. AC　在正三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB=BC$,可知该三棱锥为正四面体.

对于 A,正四面体 $A-BCD$ 的高为 $\sqrt{6^2-(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6)^2}=2\sqrt{6}$,正四面体 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2\times 2\sqrt{6}=18\sqrt{2}$,故 A 正确;

对于 B,$\overrightarrow{CP}+2\overrightarrow{DP}=\mathbf{0}\Rightarrow\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PD}$,故 $CP=\frac{2}{3}\times 6=4$.

$BP=\sqrt{BC^2+CP^2-2BC\cdot CP\cos\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{7}<9$,故 B 错误;

对于 C,取 AB 的中点 E,连接 PE.

因为 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|2\overrightarrow{PE}|=2|\overrightarrow{PE}|$,且 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|:|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}:1$,所以 $|\overrightarrow{PE}|=3\sqrt{2}$. 由题可知,$AP=BP$,故 $PE\perp AB$.

所以 $AP^2=AE^2+PE^2=9+18=27\Rightarrow AP=3\sqrt{3}$.

在$\triangle APD$ 中,$AP^2=AD^2+PD^2-2\cdot AD\cdot PD\cos\frac{\pi}{3}$,解得 $PD=3$.

即 $AP^2+PD^2=AD^2$,即 $AP\perp CD$,故 C 正确;

对于 D,过点 P 作 BD 的平行线,交 BC 于点 F,可知 $AP=AF$,$\angle APF$ 所成的角即为 AP 与 BD 所成的角. 若存在该点 P,满足 $AP\perp BD$,则$\angle APF=90°$,则$\triangle APF$ 不存在,故 D 错误. 故选 AC.

13. 90　顾客只能选 1 款饮料,共有 C_3^1 种选法,因为套餐内有 4 款,在汉堡和小食中,每样至少选 1 款,故有 $C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1$ 种选法,故顾客可选的套餐共有 $C_3^1(C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1)=90$ 种.

14. 15π　设正三棱柱底面边长为 a,高为 h,外接球半径为 R.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$,可得 $a=3$.

又因为 $S_{\triangle ABC}:S_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=1:6$,所以 $S_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=2S_{\triangle ABC}+S_{侧}=6S_{\triangle ABC}$.

故 $S_{侧}=3ah=4S_{\triangle ABC}=9\sqrt{3}$,解得 $h=\sqrt{3}$.

由勾股定理可得 $(\frac{h}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2}{3})^2=R^2$,解得 $R^2=\frac{15}{4}$.

该棱柱外接球的表面积为 $4\pi R^2=15\pi$.

15. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$　因为相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{1}{2}$,所以 $T=1$,故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$.

所以 $f(x)=\cos(2\pi x+\varphi)+B$.

若 $x=\frac{1}{3}$时,函数取得最小值 $-\frac{3}{2}$,则 $B=-\frac{3}{2}-(-1)=-\frac{1}{2}$;

且有 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,故 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=\cos(2\pi x+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$.

所以 $f(\frac{2\,023}{4})=\cos(\frac{2\,023\pi}{2}+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}=\cos\frac{11\pi}{6}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

16. 4　由题意得，直线 AB 倾斜角为 θ，经过 $F(-\frac{p}{2},0)$.

设直线 AB 的方程为 $y=(x+\frac{p}{2})\tan\theta$，即 $x\tan\theta-y+\frac{p}{2}\tan\theta=0$，

故 $|MN|=\dfrac{|-p+\frac{p}{2}\tan\theta|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\left|\frac{p}{2}\sin\theta-p\cos\theta\right|=\frac{p}{2}\sin\theta-p\cos\theta$（因为 $\tan\theta>2$）.

由焦半径公式知：$|AF|=\dfrac{p}{1+\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$.

故 $|BF|-|AF|=\dfrac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

所以 $|MN|\cdot|BF|-|MN|\cdot|AF|=|MN|\cdot(|BF|-|AF|)=(\frac{p}{2}\sin\theta-p\cos\theta)\dfrac{2p\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{p^2\sin\theta\cos\theta-2p^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=p^2\dfrac{1}{\tan\theta}-2p^2\dfrac{1}{\tan^2\theta}$.

令 $t=\dfrac{1}{\tan\theta}$，原式 $=p^2t-2p^2t^2$，当 $t=\frac{1}{4}$ 时，取得最大值，即 $\frac{1}{8}p^2=2$，所以 $p=4$.

17. 解：(1)由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin B\cos(A-C)+\sqrt{2}\cos B\cos A\sin C=\sin A(1+\sqrt{2}\sin B\sin C)$，

$\therefore\sqrt{2}\sin B(\cos A\cos C+\sin A\sin C)+\sqrt{2}\cos B\cos A\sin C=\sin A+\sqrt{2}\sin A\sin B\sin C$，

$\therefore\sqrt{2}\sin B\cos A\cos C+\sqrt{2}\cos B\cos A\sin C=\sin A$，

$\therefore\sqrt{2}\cos A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\sin A$，

$\therefore\sqrt{2}\cos A\sin(B+C)=\sin A$，即 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………… 4分

又 $\because 0<A<\pi$，故 $A=\dfrac{\pi}{4}$. …………………………………… 5分

(2) $\because A=\dfrac{\pi}{4}$，$a=\sqrt{6}$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\therefore b^2+c^2-\sqrt{2}bc=6$. …………………… 6分

$\because b^2+c^2\geqslant 2bc$（当且仅当 $b=c$ 时等号成立），$\therefore b^2+c^2-\sqrt{2}bc\geqslant 2bc-\sqrt{2}bc$，

即 $2bc-\sqrt{2}bc\leqslant 6\Rightarrow bc\leqslant 3(2+\sqrt{2})$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立. …………………… 8分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A\leqslant\dfrac{1}{2}\times 3(2+\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}$. …………………………………… 10分

18. 解：(1)设 $\{b_n\}$ 的公差为 d，因为 $b_7+b_8=\dfrac{17}{3}$，$T_{14}-T_7=28$.

则 $\begin{cases}b_7+b_8=2b_1+13d=\dfrac{17}{3}\\ T_{14}-T_7=14b_1+\dfrac{14\times 13}{2}d-(7b_1+\dfrac{7\times 6}{2}d)=28\end{cases}$，得 $\begin{cases}b_1=\dfrac{2}{3}\\ d=\dfrac{1}{3}\end{cases}$. …………………… 1分

所以 $T_3=\dfrac{2}{3}+1+\dfrac{4}{3}=3$，$b_{11}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times 10=4$，故 $a_{2n-1}a_{2n+1}=1$. …………………… 2分

又因为 $\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}=\dfrac{4a_{2n-1}}{a_{2n}}\Rightarrow a_{2n}a_{2n+2}=4a_{2n-1}a_{2n+1}$，故 $a_{2n}a_{2n+2}=4$. …………………… 3分

由 $\begin{cases}3a_1+a_2-a_3=0\\ S_4=S_7\end{cases}$，得 $\begin{cases}3a_1+a_2-\dfrac{1}{a_1}=0\\ a_1+a_2+\dfrac{1}{a_1}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\ a_2=-2\end{cases}$. …………………… 5分

故数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\begin{cases}1, n\text{ 为奇数}\\ -2, n\text{ 为偶数}\end{cases}$. …………………… 6分

(2)由(1)知 $S_{2n}=(1-2)n=-n$，$S_{2n-1}=(1-2)(n-1)+1=-n+2$. …………………… 7分

由(1)知 $T_n=nb_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{n(n-1)}{6}=\dfrac{n^2}{6}+\dfrac{n}{2}$. …………………… 8分

故 $S_{2n}+S_{2n-1}+T_n=\dfrac{n^2}{6}+\dfrac{n}{2}-n-n+2=\dfrac{n^2}{6}-\dfrac{3n}{2}+2=\dfrac{1}{6}(n-\dfrac{9}{2})^2-\dfrac{11}{8}$，…………………… 9分

因为 $n\geqslant 1$，所以当 $n=4$ 或 5 时，$S_{2n}+S_{2n-1}+T_n$ 取得最小值 $-\dfrac{4}{3}$. …………………… 11分

故 $S_{2n}+S_{2n-1}+T_n$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$. ………………………………………… 12分

19. (1)证明：$\because BP=3, BE=\frac{9}{5}, PE=\frac{12}{5}, \therefore BP^2=BE^2+PE^2$，即 $BC\perp PE$. ………………… 2分

又底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB\perp BC$，故 $AE^2=AB^2+BE^2=\frac{181}{25}$. ………………………… 4分

$\therefore AE^2+PE^2=\frac{181}{25}+\frac{144}{25}=13=AP^2$，即 $AE\perp PE$. ………………………………… 5分

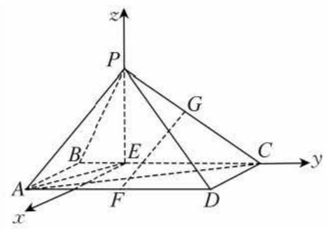
$\because AE\cap BC=E, \therefore PE\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because PE\subset$ 平面 PAE，$\therefore$ 平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………… 6分

(2)解：$\because BP\perp PC, BC\perp PE, PE=\frac{12}{5}, BE=\frac{9}{5}, \therefore EC=\frac{PE^2}{BE}=\frac{16}{5}, BC=5$.

由(1)知 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形.

以 E 为坐标原点，过 E 作 AB 的平行线作为 x 轴，EC、EP 所在直线为 y、z 轴建立空间直角坐标系，如图，



$\therefore P(0,0,\frac{12}{5}), A(2,-\frac{9}{5},0), C(0,\frac{16}{5},0), F(2,\frac{7}{10},0), G(0,\frac{8}{5},\frac{6}{5})$.

…………………………………………………………………… 8分

$\therefore \overrightarrow{AP}=(-2,\frac{9}{5},\frac{12}{5}), \overrightarrow{PC}=(0,\frac{16}{5},-\frac{12}{5}), \overrightarrow{FG}=(-2,\frac{9}{10},\frac{6}{5})$.

设平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-2x+\frac{9}{5}y+\frac{12}{5}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{16}{5}y-\frac{12}{5}z=0\end{cases}$，令 $z=4$，则 $x=\frac{15}{2}, y=3$，所以 $\boldsymbol{n}=(\frac{15}{2},3,4)$. ……………… 10分

$\therefore \sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{FG}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FG}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{FG}|}=\frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{225}{4}+9+16}\cdot\sqrt{4+\frac{81}{100}+\frac{36}{25}}}=\frac{6\sqrt{13}}{65}$. ……………… 12分

20. 解：(1)设该同学通过第一、二、三、四个关卡的概率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4.

$\begin{cases}p_1p_2=\frac{4}{9}\\ p_1p_2p_3=\frac{2}{9}\\ p_3p_4=\frac{1}{5}\\ (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4=\frac{1}{45}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}p_1=\frac{2}{3}\\ p_2=\frac{2}{3}\\ p_3=\frac{1}{2}\\ p_4=\frac{2}{5}\end{cases}$. ………………………………………… 4分

该同学至少获得三份通关文牒的概率为 $p_1p_2p_3(1-p_4)+p_1p_2(1-p_3)p_4+p_1(1-p_2)p_3p_4+(1-p_1)p_2p_3p_4+p_1p_2p_3p_4=\frac{2}{9}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

…………………………………………………………………………………… 6分

(2)由题可知，X 可能的值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$， ………………………………………… 7分

$P(X=1)=(1-p_1)(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)(1-p_3)=\frac{5}{18}$， ………………… 8分

$P(X=2)=(1-p_1)p_2p_3+p_1(1-p_2)p_3+p_1p_2(1-p_3)=\frac{4}{9}$， ………………………………………… 9分

$P(X=3)=p_1p_2p_3=\frac{2}{9}$. ……………………………………………………………………… 10分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(X)=0\times\frac{1}{18}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{2}{9}=\frac{11}{6}$. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)双曲线的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，故$\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{4}$. ① ………… 2分

将点$P_1(4,1)$代入C中，得$\frac{16}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$. ② ………… 3分

又因为$c^2=a^2+b^2$， ③

所以$a^2=12,b^2=3$，故双曲线C的方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$. ………… 5分

(2)联立直线l和双曲线C的方程$\begin{cases}\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1\\x+3y+m=0\end{cases}$，得$5y^2+6my+m^2-12=0$.

所以$y_1+y_2=-\frac{6m}{5}$，$y_1y_2=\frac{m^2-12}{5}$.

因为点A、B分别位于第二、四象限，所以$y_1y_2<0$，故$|m|<2\sqrt{3}$.

所以$|AB|=\sqrt{1+9}|y_1-y_2|=\sqrt{10[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{10[(-\frac{6m}{5})^2-\frac{4(m^2-12)}{5}]}=\sqrt{\frac{32m^2}{5}+96}\geqslant 4\sqrt{6}$($m=0$时等号成立). ………… 8分

点P_1到直线l的距离$d_1=\frac{|7+m|}{\sqrt{10}}=\frac{7+m}{\sqrt{10}}$； ………… 9分

点P_2到直线l的距离$d_2=\frac{|-7+m|}{\sqrt{10}}=\frac{7-m}{\sqrt{10}}$；………… 10分

故$S_{四边形AP_1BP_2}=S_{\triangle P_1AB}+S_{\triangle P_2AB}=\frac{1}{2}|AB|d_1+\frac{1}{2}|AB|d_2=\frac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{32m^2}{5}+96}\times\frac{14}{\sqrt{10}}$

$\geqslant\frac{1}{2}\times 4\sqrt{6}\times\frac{14}{\sqrt{10}}=\frac{28\sqrt{15}}{5}$. ………… 12分

22. 解：(1)因为$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)\leqslant g(x)$有解$\Rightarrow f(x)-g(x)\leqslant 0$有解，

即$(m+1)x-\ln x\leqslant 0$，即$m+1\leqslant\frac{\ln x}{x}$，………… 1分

设函数$h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，可得$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令$h'(x)>0$，即$1-\ln x>0$，解得$0<x<e$；

令$h'(x)<0$，即$1-\ln x<0$，解得$x>e$.

所以函数$h(x)$的单调递增区间为$(0,e)$，单调递减区间为$(e,+\infty)$. ………… 4分

所以$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以$m+1\leqslant\frac{1}{e}$，即$m\leqslant\frac{1}{e}-1$，

即实数m的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{e}-1]$. ………… 6分

(2)令$y(x)=f(x)-g(x)=(m+1)x-\ln x$，可得$y'(x)=m+1-\frac{1}{x}$，$x>0$，

若$m+1\leqslant 0$，即$m\leqslant -1$时，$y'(x)<0$恒成立，所以$y(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

又由$x\to+\infty$时，$y(x)\to-\infty$，与题意不符. ………… 8分

若$m+1>0$，即$m>-1$时，令$y'(x)>0$，即$m+1>\frac{1}{x}$，解得$x>\frac{1}{m+1}$，

所以$y(x)$在$(\frac{1}{m+1},+\infty)$上单调递增，在$(0,\frac{1}{m+1})$上单调递减，

所以$y(x)_{\min}=y(\frac{1}{m+1})=(m+1)\cdot\frac{1}{m+1}-\ln\frac{1}{m+1}=1-\ln\frac{1}{m+1}=1+\ln(m+1)$.

所以$n\leqslant 1+\ln(m+1)$，所以$n-m^2-m\leqslant 1+\ln(m+1)-m^2-m$， ………… 9分

设$q(x)=1+\ln(x+1)-x^2-x$，$x>-1$，

所以$q'(x)=\frac{1}{x+1}-2x-1=\frac{1-(x+1)(2x+1)}{x+1}=\frac{-2x^2-3x}{x+1}$，

令$q'(x)>0$，即$2x^2+3x<0$，解得$-\frac{3}{2}<x<0$.

又$x>-1$，所以$q(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$q(x)_{\max}=q(0)=1+\ln 1-0-0=1$， ………… 11分

所以当$m=0,n=1$时，$n-m^2-m$的最大值为1. ………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。