

绝密★启用前

江苏省 2023—2024 学年高三上学期期末迎考卷
数 学

注意事项:

1. 本试卷共 150 分,考试用时 120 分钟.

2. 答题前,考生务必将班级、姓名、学号填写在密封线内.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{20,24\}$, $B=\{20,23\}$, 则 $A \cup B$ 中合数的个数为 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 已知复数 $z=\cos\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z^3=$ ()

A. 1 B. -1 C. i D. $-i$

3. 已知函数 $f(x)=\cos(x+\varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$), 则“ $y=f(x)$ 为奇函数”是“ $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ”的 ()

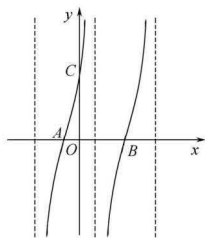
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 平面上的三个力 F_1, F_2, F_3 作用于同一点, 且处于平衡状态. 已知 $F_1=(1,0)$, $|F_2|=2$, $\langle F_1, F_2 \rangle = 120^\circ$, 则 $|F_3|=$ ()

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

5. 已知 $(x^3 + \frac{a}{x})^6$ ($a>0$) 的展开式中仅有第 5 项的系数最大, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{4}{3}, \frac{5}{2})$ B. $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ C. $[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]$ D. $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$



(第 6 题)

6. 如图, 函数 $f(x)=2\tan(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega>0$) 的部分图象与 x 轴相交于 A, B 两点, 与 y 轴相交于点 C , 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\pi}{2}$, 则 ω 的值为 ()

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1} (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $5S_7 - 7S_5 = 35, a_1 = 1$, 则数列

$\left\{ \frac{n(n+1)}{4S_n S_{n+1}} \right\}$ 的前 2024 项和为 ()

- A. $\frac{2024}{2025}$ B. $\frac{2025}{2026}$ C. $\frac{506}{1013}$ D. $\frac{2023}{4050}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & x > 0 \end{cases}$, 则函数 $g(x) = (f(x))^2 - f(f(x))$ 的所有零点之和为 ()

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知某地区秋季的昼夜温差 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(X > 9) = \frac{1}{2}$, 该地区某班级秋季每天感冒的人数 y 关于昼夜

温差 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 的经验回归方程为 $\hat{y} = \frac{2}{3}x + 1$, 秋季某天该班级感冒的学生有 9 人, 其中有 4 位男生, 5 位女

生, 则下列结论正确的是 (参考数据: $\bar{y} = 19, \bar{x} = \mu$) ()

A. 若 $P(X > 11) = \frac{2}{5}$, 则 $P(7 < X < 9) = \frac{1}{10}$

B. 从这 9 人中随机抽取 2 人, 其中至少有一位女生的概率为 $\frac{5}{6}$

C. 从这 9 人中随机抽取 2 人, 其中男生人数 ξ 的期望为 $\frac{4}{9}$

D. 昼夜温差每提高 1°C , 该班级感冒的学生大约增加 2 人

10. 已知函数 $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$, 则下列结论正确的是 ()

A. 若函数 $f(x)$ 无极值点, 则 $f(x)$ 没有零点

B. 若函数 $f(x)$ 无零点, 则 $f(x)$ 没有极值点

C. 若函数 $f(x)$ 恰有一个零点, 则 $f(x)$ 可能恰有一个极值点

D. 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 则 $f(x)$ 一定有两个极值点

11. 已知点 A, B 均在抛物线 $C: y^2 = x$ 上, 点 $P(0, 3)$, 则 ()

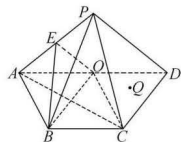
A. 直线 PA 的斜率可能为 $\frac{1}{10}$

B. 线段 PA 长度的最小值为 $\sqrt{5}$

C. 若 P, A, B 三点共线, 则存在唯一的点 B , 使得点 A 为线段 PB 的中点

D. 若 P, A, B 三点共线, 则存在两个不同的点 B , 使得点 A 为线段 PB 的中点

12. 如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是梯形, $BC \parallel AD$, $AB=BC=CD=1$, $AD=2$, $PA=PD=\sqrt{2}$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, O, E 分别为线段 AD, PA 的中点, 点 Q 是底面 $ABCD$ 内(包括边界)的一个动点, 则下列结论正确的是 ()



(第 12 题)

- A. $AC \perp BP$
- B. 三棱锥 $B-AOE$ 外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$
- C. 异面直线 PC 与 OE 所成角的余弦值为 $\frac{3}{4}$
- D. 若直线 PQ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60° , 则点 Q 的轨迹长度为 $\sqrt{3}\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若圆 C 与直线 $3x-4y-12=0$ 相切, 且与圆 $x^2-2x+y^2=0$ 相切于点 $A(2,0)$, 写出一个符合要求的圆 C 的标准方程: _____.

14. 计算: $4\sin 40^\circ - \tan 40^\circ =$ _____.

15. 与圆台的上、下底面及侧面都相切的球, 称为圆台的内切球. 若圆台的上、下底面半径分别为 r_1, r_2 , 且 $2r_1+r_2=2\sqrt{2}$, 则它的内切球的体积的最大值为 _____.

16. 反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象是双曲线(其渐近线分别为 x 轴和 y 轴), 同样的, “对勾函数” $y=mx+\frac{n}{x}$ ($m>0, n>0$) 的图象也是双曲线. 设 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}, n=\frac{\sqrt{3}}{4}$, 则此“对勾函数”所对应的双曲线的焦距为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, c=2, 2a=b\cos C+c$.

(1) 求角 B 的大小;

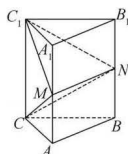
(2) 若 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}, |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|, \angle CAD=\frac{\pi}{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分) 抽屉里装有 5 双型号相同的手套, 其中 2 双是非一次性手套, 3 双是一次性手套, 每次使用手套时, 从抽屉中随机取出 1 双(2 只都为一次性手套或都为非一次性手套), 若取出的是一次性手套, 则使用后直接丢弃, 若取出的是非一次性手套, 则使用后经过清洗再次放入抽屉中.

(1) 求在第 2 次取出的是非一次性手套的条件下, 第 1 次取出的是一次性手套的概率.

(2) 记取了 3 次后,取出的一次性手套的双数为 X ,求 X 的分布列及数学期望.

19. (本小题满分 12 分)如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M,N 分别为棱 AA_1, BB_1 的中点, $AC \perp AB, AB=4, AC=3, AA_1=6$.



(第 19 题)

- (1) 求证: $CM \perp$ 平面 C_1MN ;
- (2) 求二面角 $C-C_1N-M$ 的正弦值.

20. (本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{a}$.

- (1) 当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $0 < a < 1$,求证: $f(x) \geq \frac{2+\ln a}{a}$.

21. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n}=a_n+a_m+2mn$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 若存在正整数 k , 使得 $2S_k+S_{k+1}=0$, 求 k 的值;
- (3) 设 $b_n=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)$, T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $T_n < \frac{n}{n+1}$.

22. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 $C(0, -1)$ 和点 $D\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 均在椭圆 E 上.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 设 P 是椭圆上一点(异于 C, D), 直线 PC, PD 与 x 轴分别交于 M, N 两点. 证明: 在 x 轴上存在两点 A, B , 使得 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA}$ 是定值, 并求此定值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线