2023—2024 学年度上期高 2024 届期末考试

数学试卷（文科）

考试时间：120 分钟　满分：150 分

注意事项：1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上．

2．本试卷分选择题和非选择题两部分．

3．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后．再选涂其它答案标号．

4．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定位置上．

5．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效．

6．考试结束后，只将答题卡交回．

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：（本题共 12 小题，每小题 5 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\left\{y\middle|y=2^x,x>1\right\}$，$N=\left\{x\middle|y=\sqrt{2x-x^2}\right\}$，则 $M\cup N$ 等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{2\}$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[0,+\infty)$

2．已知 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{ax}-1}$ 为奇函数，则 $a=$（　　）

A．2　　B．1　　C．-1　　D．-2

3．复数 z 满足 $(z+2)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$（i 为虚数单位）．则 z 的共轭复数的虚部（　　）

A．-3　　B．1　　C．i　　D．$-\mathrm{i}$

4．已知首项为 1，公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则“$S_3=3$”是“$q=-2$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．设函数 $f(x)=x+2$，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $a_n=2f(n)-1$，$f(b_n)=2n-1$，则 $a_6=$（　　）

A．b_7　　B．b_9　　C．b_{11}　　D．b_{13}

6．已知 a，b 是两条直线．α，β，γ 是三个平面，则下列命题正确的是（　　）

A．若 $a\parallel\alpha$，$b\parallel\beta$，$a\parallel b$，则 $\alpha\parallel\beta$　　B．若 $\alpha\perp\beta$，$a\perp\alpha$，则 $\alpha\parallel\beta$

C．若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\cap\gamma=a$，则 $a\perp\alpha$　　D．若 $\alpha\parallel\beta$，$a\parallel\alpha$，则 $\alpha\parallel\beta$

7．记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为边长的正三角形的面积依次为 S_1,S_2,S_3

且 $S_1-S_2-S_3=-\frac{\sqrt{6}}{4}bc$，则 $A=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

18. 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于圆 $\Gamma: x^2+y^2=1$，且 P 是圆 Γ 上一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最大值是（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. 我国数学家张益唐在“孪生素数”研究方面取得突破，孪生素数也称为孪生质数，就是指两个相差 2 得素数，例如 5 和 7. 在大于 3 且不超过 20 的素数中，随机选取 2 个不同的数，恰好是一组孪生素数的概率为(　　)

A. $\frac{3}{56}$　　B. $\frac{3}{28}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{5}$

10. 已知函数 $f(x)=\left|\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\left|\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$，则 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点个数为（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

11. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 2，$AB\perp BC$，$AB=BC=2$，过 AB，BB_1 的中点 E，F 作平面 α 与平面 AA_1C_1C 垂直，则平面 α 截该三棱柱所得截面的周长为（　　）

A. $2\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{2}+2\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{2}+\sqrt{6}$　　D. $3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x\ln x, x>0\\ 2x+1, x\le 0\end{cases}$，若 $x_1\ne x_2$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $|x_1-x_2|$ 的最大值为（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{3}{4}$

第Ⅱ卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$，则 $m=$______.

14. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}0\le x\le 2\\ y\ge 0\\ x+y\le 2\end{cases}$，则 $z=x+3y$ 的最大值为______.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2、M，N 为双曲线一条渐近线上两点，A 为双曲线的右顶点，若四边形 MF_1NF_2 为矩形，且 $\angle MAN=\frac{2\pi}{3}$，则双曲线 C 的离心率为______.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=-3$，$a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n-\frac{4}{3}=0$，$S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则满足不等式

$\left|S_n-n-9\right|>\dfrac{1}{2024}$ 的 n 的最大值为______.

三、解答题：（本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，$AC=1$，$BC=\sqrt{7}$.

（1）若 $A=150^\circ$，求 $\cos B$；

（2）D 为 AB 边上一点，且 $BD=2AD=2CD$，求$\triangle ABC$的面积.

18.（本小题满分 12 分）

2023 年实行新课标新高考改革的省市共有 29 个，选科分类是高级中学在校学生生涯规划的重要课题，某高级中学为了解学生选科分类是否与性别有关，在该校随机抽取 100 名学生进行调查．统计整理数据得到如下的 2×2 列联表；

	选物理类	选历史类	合计
男生	35	15	
女生	25	25	
合计			100

（1）依据小概率值 0.05 的独立性检验，能否据此推断选科分类与性别有关联？

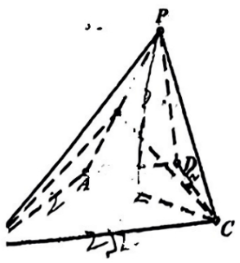
（2）在以上随机抽取的女生中，按不同选择类别同比例分层抽样，共抽取 6 名女生进行问卷调查，然后在被抽取的 6 名女生中再随机抽取 4 名女生进行面对面访谈．求面对面访谈的女生中选择历史类的人数为 2 的概率．

附：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC\perp CD$，$BC=2CD=2AD=2\sqrt{2}$，平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC .



（1）证明：$PC\perp AB$；

（2）若 $PA=PC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}AC$，$M$ 是 PA 的中点，求三棱锥 $C-PBM$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ax\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}+2$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）对 $\forall x\in\left[1,+\infty\right)$， $f\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$，离心率为 $\frac{1}{3}$

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）设椭圆 C 的左，右焦点分别为 F_1， F_2，左，右顶点分别为 A，B，点 M，N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点，且 $F_1M\ //\ F_2N$，记直线 AM， BN 的斜率分别为 k_1， k_2，若 $3k_1+2k_2=0$，求直线 F_1M 的方程.

请考生在第 22，23 题中任选择一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时，用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目所对应的标号涂黑．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

（1）求 C 的直角坐标方程；

（2）设点 M 的直角坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，$l$ 与曲线 C 的交点为 A，B，求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23．[选修 4-5：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-1|+x+\frac{1}{2}$ 的最小值为 m

（1）求 m 的值；

（2）若 a，b，c 为正实数，且 $a+b+c=m$，证明：$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$.