

# 2024年1月“七省联考”押题预测卷02

## 数 学

(考试时间: 120分钟 试卷满分: 150分)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 集合  $A = \{x | \ln x \geq 1\}$ ,  $B = \{x | 1 < x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
- A.  $\emptyset$                       B.  $\{x | e < x < 3\}$                       C.  $\{x | e \leq x < 3\}$                       D.  $\{x | x > 1\}$

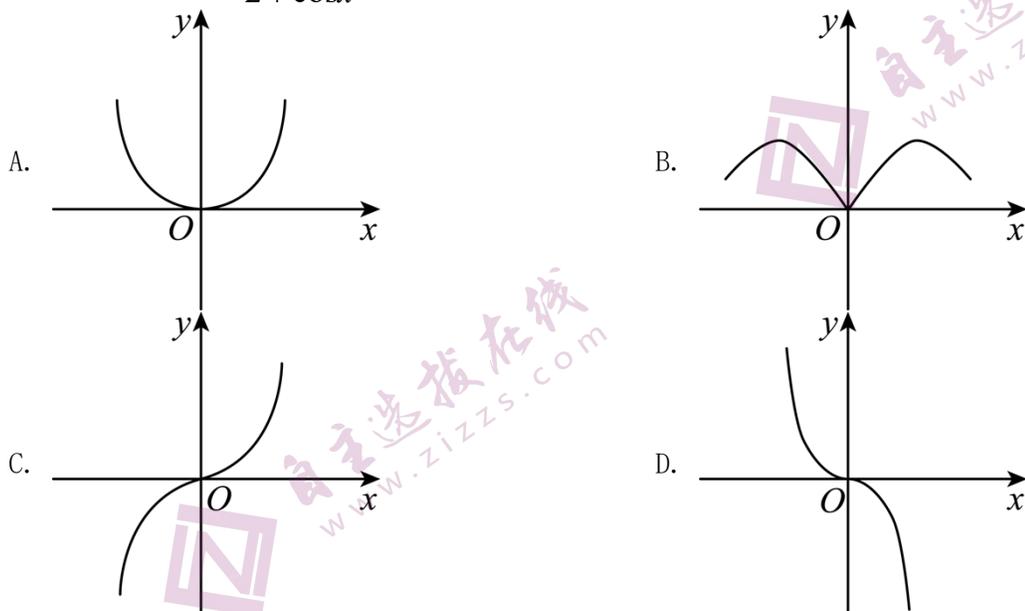
2. 已知复数  $z \cdot (1 - 2i)$  在复平面内对应点的坐标为  $(3, 1)$ , 则  $z =$  ( )

- A.  $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$                       B.  $\frac{1}{5} + i$                       C.  $\frac{1}{5} - i$                       D.  $\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$

3.  $(2x^3 - \frac{1}{x})^6$  展开式中  $x^{10}$  项的系数为 ( )

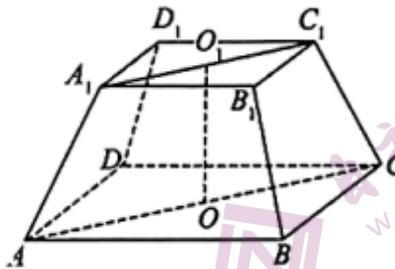
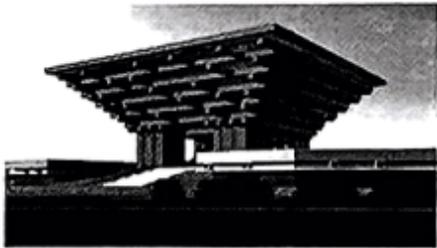
- A. -240                      B. -20                      C. 20                      D. 240

4. 函数  $f(x) = \frac{x(e^{-x} + e^x)}{2 + \cos x}$  的部分图象大致为 ( )



5. 中国国家馆, 以城市发展中的中华智慧为主题, 表现出了“东方之冠, 鼎盛中华, 天下粮仓, 富庶百姓”的中国文化精神与气质. 如图, 现有一个与中国国家馆结构类似的正四棱台

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，上下底面的中心分别为  $O_1$  和  $O$ ，若  $AB=2A_1B_1=4$ ， $\angle A_1AB=60^\circ$ ，则正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为 ( )



- A.  $\frac{20\sqrt{2}}{3}$       B.  $\frac{28\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{20\sqrt{6}}{3}$       D.  $\frac{28\sqrt{6}}{3}$

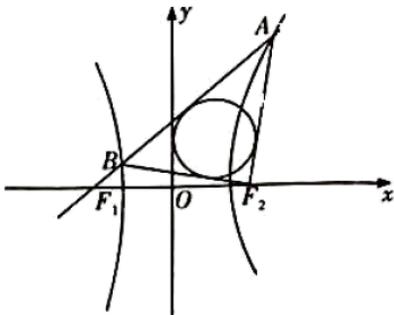
6. 公元 9 世纪，阿拉伯计算家哈巴什首先提出正割和余割概念，1551 年奥地利数学家、天文学家雷蒂库斯在《三角学准则》中首次用直角三角形的边长之比定义正割和余割，在某直角三角形中，一个锐角的斜边与其邻边的比，叫做该锐角的正割，用  $\sec(\text{角})$  表示；锐角的斜边与其对边的比，叫做该锐角的余割，用  $\csc(\text{角})$  表示，则  $\sqrt{3}\csc 20^\circ - \sec 20^\circ =$  ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $2\sqrt{3}$       C. 4      D. 8

7. 已知奇函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上可导，其导函数为  $f'(x)$ ，且  $f(1-x) - f(1+x) + x = 0$  恒成立，则  $f'(2023) =$  ( )

- A. 1      B.  $\frac{1}{2}$       C. 0      D.  $-\frac{1}{2}$

8. 如图，已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过  $F_1$  的直线与  $C$  分别在第一、二象限交于  $A, B$  两点， $\triangle ABF_2$  内切圆半径为  $r$ ，若  $|BF_1| = r = a$ ，则  $C$  的离心率为 ( )



- A.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$       B.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{30}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{85}}{5}$

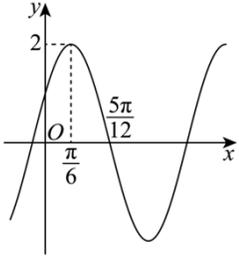
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 2023 年 10 月 3 日第 19 届杭州亚运会跳水女子 10 米跳台迎来决赛，中国“梦之队”包揽了该项目的冠亚军。已知某次跳水比赛中运动员五轮的成绩互不相等，记为  $x_i (i=1,2,3,4,5)$ ，平均数为  $\bar{x}$ ，若随机删去其任一轮的成绩，得到一组新数据，记为  $y_i (i=1,2,3,4)$ ，平均数为  $\bar{y}$ ，下面

说法正确的是 ( )

- A. 新数据的极差可能等于原数据的极差
- B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数
- C. 若  $\bar{x} = \bar{y}$ , 则新数据的方差一定大于原数据方差
- D. 若  $\bar{x} = \bar{y}$ , 则新数据的第 40 百分位数一定大于原数据的第 40 百分位数

10. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示. 则 ( )



- A.  $f(x)$  的图象关于  $(-\frac{\pi}{12}, 0)$  中心对称
- B.  $f(x)$  在区间  $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$  上单调递增
- C. 函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度可以得到函数  $g(x) = 2 \sin 2x$  的图象
- D. 将函数  $f(x)$  的图象所有点的横坐标缩小为原来的  $\frac{1}{2}$ , 得到函数  $h(x) = 2 \sin(4x + \frac{\pi}{6})$  的图象

11. 已知  $P$  是圆  $C: x^2 + y^2 = 1$  上一点,  $Q$  是圆  $D: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$  上一点, 则 ( )

- A.  $|PQ|$  的最小值为 2
- B. 圆  $C$  与圆  $D$  有 4 条公切线
- C. 当  $|PQ|$  取得最小值时,  $P$  点的坐标为  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$
- D. 当  $|PQ| = 1 + \sqrt{21}$  时, 点  $D$  到直线  $PQ$  的距离小于 2

12. 已知正四面体  $P-ABC$  的棱长为 2, 下列说法正确的是 ( )

- A. 正四面体  $P-ABC$  的外接球表面积为  $6\pi$
- B. 正四面体  $P-ABC$  内任意一点到四个面的距离之和为定值
- C. 正四面体  $P-ABC$  的相邻两个面所成二面角的正弦值为  $\frac{1}{3}$
- D. 正四面体  $Q-MNG$  在正四面体  $P-ABC$  的内部, 且可以任意转动, 则正四面体  $Q-MNG$  的体积最大值为  $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知等差数列  $\{a_n\}$  前 3 项和  $S_3 = 12$ ,  $a_1 - 1$ ,  $a_2 - 1$ ,  $a_3 + 3$  成等比数列, 则数列  $\{a_n\}$  的公差  $d =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 = 2$ , 且  $\vec{a} = (-1, 1)$ , 则向量  $\vec{b}$  在向量  $\vec{a}$  上的投影向量为 \_\_\_\_\_.

15. 正三棱台  $A_1B_1C_1-ABC$  中,  $A_1B_1 = 1$ ,  $AB = AA_1 = 2$ , 点  $E$ ,  $F$  分别为棱  $BB_1$ ,  $A_1C_1$  的中点,

若过点  $A, E, F$  作截面，则截面与上底面  $A_1B_1C_1$  的交线长为\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = x(e^{x-1} - 2a) - \ln x$  的最小值为 0，则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足  $2\sqrt{S_n} = a_n + 1, n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

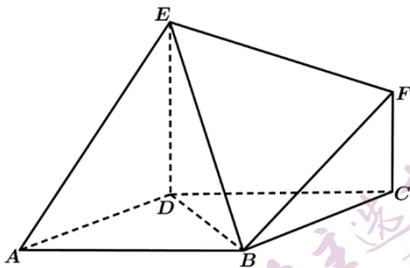
(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = a_n + \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  和  $T_n$ .

18. 记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，已知  $\frac{1 - \sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B}$ .

(1) 求  $A + 2B$  的值；

(2) 若  $a^2 + 2c^2 \geq \lambda b^2$ ，求  $\lambda$  的最大值.

19. 如图, 底面  $ABCD$  是边长为 2 的菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $DE \perp$  平面  $ABCD$ ,  $CF \parallel DE$ ,  $DE = 2CF$ ,  $BE$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$ .



- (1) 求证: 平面  $BEF \perp$  平面  $BDE$ ;
- (2) 求二面角  $B-EF-D$  的余弦值.

20. “村BA”后, 贵州“村超”又火出圈!所谓“村超”, 其实是目前火爆全网的贵州乡村体育赛事——榕江(三宝侗寨)和美乡村足球超级联赛, 被大家简称为“村超”. “村超”的民族风、乡土味、欢乐感, 让每个人尽情享受足球带来的快乐.

某校为了丰富学生课余生活, 组建了足球社团. 足球社团为了解学生喜欢足球是否与性别有关, 随机抽取了男、女同学各 50 名进行调查, 部分数据如表所示:

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生		20	
女生	15		

合计			100

附： 
$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$\alpha$	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$x_\alpha$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

(1) 根据所给数据完成上表，依据  $\alpha = 0.005$  的独立性检验，能否有 99.5% 的把握认为该中学学生喜欢足球与性别有关？

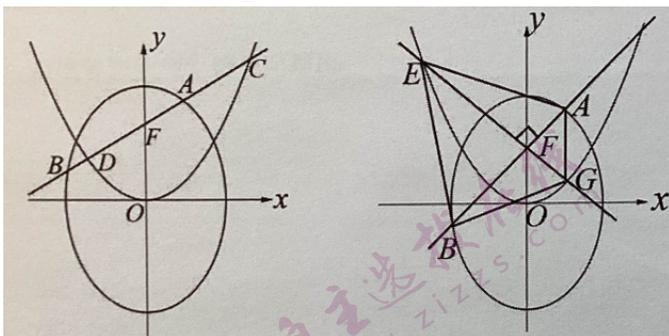
(2) 社团指导老师从喜欢足球的学生中抽取了 2 名男生和 1 名女生示范定点射门. 据统计，这两名男生进球的概率均为  $\frac{2}{3}$ ，这名女生进球的概率为  $\frac{1}{2}$ ，每人射门一次，假设各人进球相互独立，求 3 人进球总次数  $X$  的分布列和数学期望.

21. 已知函数  $f(x) = axe^x (a \neq 0)$ ，  $g(x) = -x^2$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间；

(2) 当  $x > 0$  时，  $f(x)$  与  $g(x)$  有公切线，求实数  $a$  的取值范围.

22. 已知椭圆  $T: \frac{y^2}{2} + x^2 = 1$ , 其上焦点  $F$  与抛物线  $K: x^2 = 4y$  的焦点重合.



(1) 若过点  $F$  的直线交椭圆  $T$  于点  $A, B$ , 同时交抛物线  $K$  于点  $C, D$  (如图 1 所示, 点  $C$  在椭圆与抛物线第一象限交点上方), 试证明: 线段  $AC$  大于  $BD$  长度的大小;

(2) 若过点  $F$  的直线交椭圆  $T$  于点  $A, B$ , 过点  $F$  与直线  $AB$  垂直的直线  $EG$  交抛物线  $K$  于点  $E, G$  (如图 2 所示), 试求四边形  $AEBG$  面积的最小值.