高三数学参考答案

1. A　$(3-\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})=6-2\mathrm{i}+9\mathrm{i}+3=9+7\mathrm{i}$,所以该复数在复平面内对应的点为$(9,7)$,该点在第一象限.

2. B　依题意得 $A=\{x\mid y=\sqrt{1-x}\}=(-\infty,1]$,$B=\{x\mid x(x-3)<0\}=(0,3)$,则 $A\cap B=(0,1]$.

3. A　设圆锥的母线长为 l,底面半径为 r,由圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长,得 $\frac{\pi l}{2}=2\pi r$,解得 $r=\frac{1}{2}$.

4. C　因为 $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$,所以 $f'(x)=\frac{2x^2-2x(2x-1)}{x^4}=\frac{-2x+2}{x^3}$,则 $f(2)=\frac{3}{4}$,$f'(2)=-\frac{1}{4}$,因此所求切线方程为 $y-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}(x-2)$,即 $x+4y-5=0$.

5. C　由 $5\times40\%=2$,将成绩从小到大排列,得第 40 百分位数是第二个成绩和第三个成绩的平均数,所以 $\frac{m+8}{2}=8$,解得 $m=8$.

6. A　由题可知 $\theta=108°$,所以 $\frac{\sin\theta}{\sin36°}=\frac{\sin108°}{\sin36°}=\frac{\cos18°}{\sin36°}=\frac{\cos18°}{2\sin18°\cos18°}=\frac{1}{2\sin18°}=\frac{2}{\sqrt5-1}=\frac{\sqrt5+1}{2}$.

7. B　圆 M 的方程可化为 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$,所以 x 轴与圆 M 相离. 当 PM 垂直于 x 轴时,四边形 $PAMB$ 面积取得最小值,最小值为 $\sqrt{3^2-1^2}\times1=2\sqrt2$.

8. D　设 $t>0$,$4a^2+b^2+2ab=4a^2+b^2+2\cdot\frac{a}{t}\cdot tb\leqslant4a^2+b^2+\frac{a^2}{t^2}+t^2b^2=(4+\frac{1}{t^2})a^2+(1+t^2)b^2$,令 $\frac{4+\frac{1}{t^2}}{1+t^2}=\frac{3}{2}$,解得 $t=\sqrt2$,所以 $\frac{9}{2}a^2+3b^2\geqslant6$,即 $3a^2+2b^2\geqslant4$,当且仅当 $a^2=\frac{8}{7}$,$b^2=\frac{2}{7}$ 时,等号成立.

9. AD　易得 $f(x)=e^x+2x-3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,因为 $f(0)=-2<0$,$f(1)=e-1>0$,所以 $a\in(0,1)$,则 $e^a-1>0$,$a^2-a=a(a-1)<0$,$\ln a<0$,$a^2-a^3=a^2(1-a)>0$,故选 AD.

10. BD　设点 $C(x,y)$,因为 CA,CB 所在直线的斜率之积是 m,所以 $k_{CA}\cdot k_{CB}=\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=m(x\neq\pm1)$,整理可得 $x^2-\frac{y^2}{m}=1(x\neq\pm1)$. 当 $m=-1$ 时,顶点 C 的轨迹是圆(除去与 x 轴的交点);当 $m<0$ 且 $m\neq-1$ 时,顶点 C 的轨迹是椭圆(除去与 x 轴的交点);当 $m>0$ 时,顶点 C 的轨迹是双曲线(除去与 x 轴的交点). 故选 BD.

11. BCD　因为 $f(x)\leqslant|f(\frac{7\pi}{12})|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 对称,则 $f(0)=f(\frac{7\pi}{6})$,即 $a=\sin\frac{7\pi}{3}+a\cos\frac{7\pi}{3}$,解得 $a=\sqrt3$.

$f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$f(-\frac{\pi}{6})=2\sin 0=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 对称. 当 $x\in(0,m)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3})$. 因为 $f(x)=\sqrt{3}$ 在 $(0,m)$ 上有 2 个实数解，所以 $\frac{7\pi}{3}<2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{3}$，解得 $\pi<m\leqslant\frac{7\pi}{6}$. 直线 $24x-9\pi y-8\pi=0$ 经过点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 与 $(\frac{13\pi}{12},2)$，易知 $(\frac{\pi}{3},0)$ 与 $(\frac{13\pi}{12},2)$ 分别是函数 $f(x)$ 的零点与其图象的最高点，结合图象(图略)可知 $f(x)$ 的图象与直线 $24x-9\pi y-8\pi=0$ 恰有 5 个交点. 故选 BCD.

12. AC　如图 1，连接 A_1B，A_1D，BD. 由 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+(1-x-y)\overrightarrow{AA_1}$ $(x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1)$，点 M 的轨迹在 $\triangle A_1BD$ 内(包括边界). 因为平面 A_1BD // 平面 CB_1D_1，所以 $V_{M-B_1D_1C}=V_{A_1-B_1D_1C}=V_{C-A_1B_1D_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$，故 A 正确.

易知 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD. 设 AC_1 与平面 A_1BD 相交于点 P，由于 $V_{A-A_1BD}=V_{B-A_1D_1B_1}=V_{C-A_1D_1B_1}=\frac{1}{6}$，则点 A 到平面 A_1BD 的距离为 $AP=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

若 $AM=\frac{\sqrt{5}}{3}$，则 $MP=\frac{\sqrt{2}}{3}$，即点 M 的轨迹在以 P 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{3}$ 为半径的圆上，如图 2. 在三角形 A_1EP 中，$A_1P=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$PE=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\angle EA_1P=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理解得 $A_1E=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\angle A_1PE=\frac{\pi}{6}$，所以 M 的轨迹长度为 $\frac{\pi}{6}\times6\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$，故 B 错误.

因为 D_1C_1 // AB，所以 $\angle ABM$ 为异面直线 BM 与 D_1C_1 所成的角，则 $\sin\angle ABM\geqslant\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\angle ABM\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 正确.

由三垂线定理可知，又 $AP\perp$ 平面 A_1BD，要使得 $A_1M\perp AM$，则 $A_1M\perp MP$，所以点 M 在以 A_1P 为直径的圆上，则存在无数个点，使得 $A_1M\perp AM$，故 D 错误.

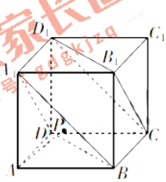


图 1

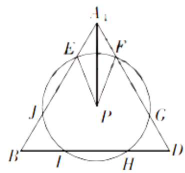
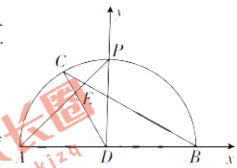


图 2

13. 4　双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$，故 $b=4$，所以右焦点 F 的坐标为 $(2\sqrt{5},0)$，F 到直线 $y=2x$ 的距离 $d=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2^2+1^2}}=4$.

14. -1 由 $f(4-x)=f(x)$ 可得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(5)=f(-1)=-f(1)=-1$.

15. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ 以 D 为坐标原点，DB，DP 所在直线分别为 x，y 轴，建立直角坐标系，则 $A(-5,0)$，$B(5,0)$，$P(0,5)$，$C(-3,4)$，



则 $\overrightarrow{AP}=(5,5)$，$\overrightarrow{BC}=(-8,4)$，所以 $\cos\angle PEC=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-40+20}{5\sqrt{2}\times 4\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. 32；$\frac{(n+1)!}{2^n}-1$ 因为 $2=2\times1\times\cdots\times1$，所以 $n\times n$ 的宫格中 2 的放置有 A_n^n 种方法，又 2 的正负号和 1 的正负号共有 2^{n^2} 种情况，所以 $a_n=2^{n^2}A_n^n$，即 $a_2=2^4A_2^2=32$. $\frac{(n-1)a_n}{2^{n^2+n}}=\frac{(n-1)\cdot n!}{2^n}=\frac{(n+1)!}{2^n}-\frac{n!}{2^{n-1}}$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(i-1)a_i}{2^{i^2+i}}=(\frac{2!}{2^1}-\frac{1!}{2^0})+(\frac{3!}{2^2}-\frac{2!}{2^1})+\cdots+[\frac{(n+1)!}{2^n}-\frac{n!}{2^{n-1}}]=\frac{(n+1)!}{2^n}-1$.

17. 解：(1) 由 $A+B=2C$，可得 $\pi-C=2C$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………… 1 分

由 $a\cos B+b\cos A=abc$ 及正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=ab\sin C$，

则 $\sin C=ab\sin C$，解得 $ab=1$. ………………………………………………… 3 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………… 5 分

(2) 由余弦定理可知 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-1\geqslant 2ab-1=1$，即 $c\geqslant1$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. ……………………………………………………………………… 8 分

设 h 为 AB 边上的高，所以 $S=\frac{1}{2}hc$，即 $h=\frac{2S}{c}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 AB 边上的高的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) 设 A 事件为甲通过了笔试，B 事件为第三门测试没有通过，

则 $P(A)=C_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}$，……………………………………… 2 分

$P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$，……………………………………………… 4 分

所以甲通过了笔试的条件下，第三门测试没有通过的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$.

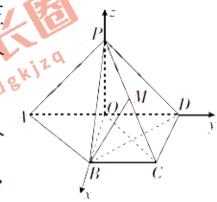
……………………………………………………………………………………… 6 分

(2) 设某人被录取的概率为 P，则 $P=[C_3^2(\frac{1}{2})^2\times(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})^3]\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，………… 8 分

由题可知 $X\sim B(100,\frac{1}{5})$，………………………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$. ……………………………………………………………… 12 分

19.（1）证明：设 AD 的中点为 O，连接 OP，OC，OB，



因为 $BC/\!/AD$，$CD\perp AD$，$BC=CD=OD=2$，所以四边形 $OBCD$ 为正方形，所以 $BD\perp OC$. …………………………………………………… 1 分

因为 $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，所以 $PO\perp AD$. …………………………………………………………………………………… 2 分

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 PAD 与平面 $ABCD$ 交于 AD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………………………………………… 3 分

所以 $PO\perp BD$. ……………………………………………………………………………………… 4 分

又 $PO\cap OC=O$，所以 $BD\perp$ 平面 OPC. ………………………………………………… 5 分

因为 $PC\subset$ 平面 OPC，所以 $PC\perp BD$. ……………………………………………………… 6 分

（2）解：以 O 为坐标原点，OB，OD，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

易知 $B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$M(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$. …………………………………………………………………… 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

可得 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=-2x=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ……………………… 10 分

设直线 BM 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即直线 BM 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 12 分

20. 解：（1）因为 $a_{n+1}+a_n=2n$，所以 $a_{n+1}+a_{n+2}=2n+2$. ………………………………… 1 分

两式相减得 $a_{n+2}-a_n=2$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，所以 $\{a_n\}$ 的公差 $d=1$. ……………………………………………… 3 分

又 $a_1+a_2=2$，所以 $2a_1+d=2$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$. ………………………………………………… 4 分

则 $a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times 1=n-\frac{1}{2}$，即 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-\frac{1}{2}$. ………………………… 5 分

（2）由（1）得 $S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=2+6+10+\cdots+4n-2=2n^2$. ……………………………………………………………………………………………… 8 分

所以不等式 $(-1)^n\lambda<S_{2n}-8n+9$ 可化为 $(-1)^n\lambda<2n^2-8n+9=2(n-2)^2+1$，

当 n 为奇数时，$-\lambda<2(n-2)^2+1$，则 $-\lambda<2(1-2)^2+1$，即 $\lambda>-3$. ……………… 10 分

当 n 为偶数时，$\lambda<2(n-2)^2+1$，则 $\lambda<1$.

综上，实数 λ 的取值范围为 $(-3,1)$. ……………………………………………………………… 12 分

广东家长圈 微信号：gdgkjzq

21.(1)解：当 $AF\perp x$ 轴时，则 $|AF|=p$， ………………………………………………………… 1分

$|AP|=\sqrt{p^2+p^2}=2\sqrt{2}$，解得 $p=2$， ………………………………………………………… 3分

所以抛物线 M 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………………… 4分

(2)(i)证明：若直线 AB 斜率不存在，则 $A(1,2)$，直线 PA 的方程为 $y=x+1$，与 $y^2=4x$ 联立可得 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，即直线 PA 与抛物线有唯一交点，不符合题意，舍去.

故直线 AB 斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$， ………………………………………………………… 5分

所以直线 AB 的方程为 $y-y_1=\frac{4}{y_1+y_2}(x-\frac{y_1^2}{4})$，即 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$. ……… 6分

又直线 AB 过点 $F(1,0)$，所以 $y_1y_2=-4$. ………………………………………………………… 7分

同理可得直线 AC 的方程为 $4x-(y_1+y_3)y+y_1y_3=0$. ………………………………………… 8分

又直线 AC 过点 $P(-1,0)$，所以 $y_1y_3=4$，所以 $y_2=-y_3$，即 B，C 两点关于 x 轴对称. ……………………………………………………………………………………………… 9分

(ii)解：不妨设 $y_2>0$，因为点 A 在 P 与 C 之间，所以 $x_2>1$，$y_2>1$，

$S_1=\frac{1}{2}\times 2y_2\times(x_2-1)=(x_2-1)y_2=\frac{y_2^3}{4}-y_2$，$S_2=\frac{1}{2}\times 2\times y_2=y_2$， ………………… 10分

则 $S_2-2S_1=3y_2-\frac{y_2^3}{2}$，令 $f(y)=3y-\frac{y^3}{2}$，则 $f'(y)=3-\frac{3y^2}{2}=\frac{3}{2}(2-y^2)$，

则 $f(y)$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，故 $f(y)_{\max}=f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$，即 S_2-2S_1 的最大值为 $2\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 12分

22.(1)解：令 $f(x)=|x\ln x|$，则 $f(x)=\begin{cases}-x\ln x, 0<x<1,\\ x\ln x, x\geq 1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-\ln x-1, 0<x<1,\\ \ln x+1, x\geq 1.\end{cases}$ ………………………………………………………… 1分

则当 $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(\frac{1}{e},1)$ 时，$f'(x)<0$， ………………… 3分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{e},1)$ 上单调递减.

又 $|x\ln x|\geq 0$，所以 $0<a<f(\frac{1}{e})$，即 $0<a<\frac{1}{e}$，所以 a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$. ……… 5分

(2)证明：由(1)可知 $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1<x_3$，

下面证明 $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$，$x_3<e^{\frac{1}{3}}$.

①证明 $x_1x_2<\frac{1}{e^2}$.

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$，因为$-x_1\ln x_1=-x_2\ln x_2$，所以$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\ln x_2}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$.

由$\frac{\ln(tx_1)}{\ln x_1}=\frac{1}{t}$，得$\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$，故$\ln x_2=\frac{\ln t}{1-t}$，则$x_1=e^{\frac{t\ln t}{1-t}}$，$x_2=e^{\frac{\ln t}{1-t}}$，…………………… 6 分

所以$x_1x_2=e^{\frac{\ln t}{1-t}+\frac{t\ln t}{1-t}}=e^{\frac{(t+1)\ln t}{1-t}}$. …………………………………………………………… 7 分

设$s(t)=\ln t-2\times\frac{t-1}{t+1}$，$t>1$，则$s'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

故$s(t)$在$(1,+\infty)$上为增函数，故$s(t)>s(1)=0$，即$\ln t>2\times\frac{t-1}{t+1}$，$t>1$. ……………… 9 分

故$\frac{(t+1)\ln t}{1-t}<-2$，则$x_1x_2<\frac{1}{e^2}$. …………………………………………………………… 10 分

②证明$x_3<e^{\frac{1}{3}}$.

由题可知$f(x_3)<f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}$，$f(e^{\frac{1}{3}})-\frac{1}{e}=\frac{e^{\frac{1}{3}}}{3}-\frac{1}{e}=\frac{e\times e^{\frac{1}{3}}-3}{3e}>\frac{2.7\times(\frac{64}{27})^{\frac{1}{3}}-3}{3e}>0$，

因为$y=f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$f(x_3)<f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}<f(e^{\frac{1}{3}})$，所以$x_3<e^{\frac{1}{3}}$成立.

综上，$x_1x_2x_3<e^{-\frac{5}{3}}$. ……………………………………………………………………………… 12 分