大联考数学五
参考答案、提示及评分细则

1. C　由题意知 $B=\{x\mid x(3x+8)\leqslant 3\}=\{x\mid (x+3)(3x-1)\leqslant 0\}=\left[-3,\frac{1}{3}\right]$，所以 $A\cup B=\left[-3,\frac{1}{2}\right)$. 故选 C.

2. A　由 $\frac{a+3\mathrm{i}}{1+b\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$ 得：$a+3\mathrm{i}=(1+2\mathrm{i})(1+b\mathrm{i})=1-2b+(b+2)\mathrm{i}$，所以 $\begin{cases}1-2b=a,\\ b+2=3,\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=1$，所以 $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. 故选 A.

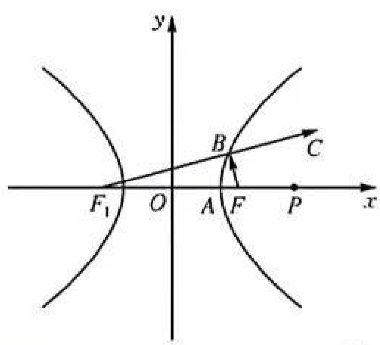
3. B　因为直线 $mx+2y+m+2=0$ 与直线 $4x+(m+2)y+2m+4=0$ 平行，所以 $(m+2)m-2\times 4=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-4$. 当 $m=2$ 时，直线 $2x+2y+4=0$ 与直线 $4x+4y+8=0$ 重合，不符合题意；当 $m=-4$ 时，直线 $-4x+2y-2=0$ 与直线 $4x-2y-4=0$ 平行，符合题意. 综上，$m=-4$. 故选 B.

4. C　因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BE}$，又 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{BE}+y\overrightarrow{BC}$，所以 $x=-2,y=\frac{5}{3}$，所以 $x+y=-\frac{1}{3}$. 故选 C.

5. C　由椭圆 $C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{18}=1$ 的方程可得 $a^2=18,b^2=6$，所以 $c^2=a^2-b^2=12$，得 $a=3\sqrt{2},c=2\sqrt{3}$，且 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$. 在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{4a^2-4c^2-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{4b^2-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{4\times 6-2|PF_1||PF_2|}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{1}{3}$，所以 $|PF_1||PF_2|=9$，又 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times 9\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$. 故选 C.

6. D　由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=3\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-3$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{-3-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+(-3)\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{9+\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}-1)}=\frac{(9+\sqrt{3})\times(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{5\sqrt{3}+6}{3}$. 故选 D.

7. A　在平面直角坐标系中，如图，



反射光线 BC 的反向延长线经过双曲线的另一个焦点 F_1，由 $\angle PFB=105^\circ$，$\angle FBC=90^\circ$，可得 $\angle BFF_1=75^\circ$，

$\angle FBF_1=90^\circ$. 记双曲线的焦距为 $2c$，实轴长为 $2a$，在 $Rt\triangle F_1BF$ 中，$|BF_1|=|F_1F|\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c$，$|BF|=|FF_1|\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c$，由双曲线的定义，可得 $|BF_1|-|BF|=2a$，所以 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}c-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}c=2a$，即 $\sqrt{2}c=2a$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故选 A.

8. A　令 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，则 $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}-1=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(2)<f(1)=0$，即 $2\ln 2+\frac{1}{2}-2<0$，所以 $\ln 4<\frac{3}{2}$，即 $a<b$. 令 $g(x)=\sin x+\tan x-2x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2=\frac{\cos^3 x-2\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos x\in(0,1)$，令 $h(x)=x^3-2x^2+1$，$x\in(0,1)$，则 $h'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)<0$，即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $h(x)>h(1)=0$，所以 $g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $g\left(\frac{3}{4}\right)>g(0)=0$，即 $\sin\frac{3}{4}+\tan\frac{3}{4}-\frac{3}{2}>0$，即 $\sin\frac{3}{4}+\tan\frac{3}{4}>\frac{3}{2}$，所以 $b<c$. 综上，$a<b<c$. 故选 A.

9. AC　当直线 l 的斜率不存在时，显然不满足题意. 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-3=k(x-2)$，即 $kx-y+3-2k=0$. 由已知得 $\frac{|-3k-2+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5k+4+3-2k|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $k=4$ 或 $k=-\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $4x-y-5=0$ 或 $3x+4y-18=0$. 故选 AC.

10. ABD　直线 OC 的方程为 $y=\frac{2}{3}x$，即 $2x-3y=0$，所以线段 AB 的垂直平分线所在的直线方程为 $2x-3y=0$，故 A 正确；因为圆 O：$x^2+y^2=4$ 与圆 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=9$，所以直线 AB 的方程为 $3x+2y-4=0$，故 B 正确；点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{13}}{13}$，所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\left(\frac{4\sqrt{13}}{13}\right)^2}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$，故 C 错误；点 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $\frac{4\sqrt{13}}{13}+2$，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times\frac{12\sqrt{13}}{13}\times\left(\frac{4\sqrt{13}}{13}+2\right)=\frac{24+12\sqrt{13}}{13}$，故 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD　由题意知，$F(2,0)$，显然直线 AB 的斜率不为 0，设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以 $P(-2,y_1)$，$Q(-2,y_2)$，由 $\begin{cases}y^2=8x,\\ x=my+2\end{cases}$ 得 $y^2-8my-16=0$，所以 $y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-16$. 若 $|AB|=10$，则 $|AB|=x_1+2+x_2+2=my_1+2+my_2+2+4=m(y_1+y_2)+8=8m^2+8=10$，解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{2}$，所以直线 AB 的方程为 $2x-y-4=0$ 或 $2x+y-4=0$，故 A 错误；因为 $k_{PF}=\frac{y_1}{-2-2}=-\frac{y_1}{4}$，$k_{QF}=\frac{y_2}{-2-2}=-\frac{y_2}{4}$，所以 $k_{PF}\cdot k_{QF}=-\frac{y_1}{4}\cdot\left(-\frac{y_2}{4}\right)=\frac{y_1y_2}{16}=-1$，所以 $PF\perp QF$，故 B 正确；由抛物线定义知，$|AF|=x_1+2$，线段 AF 中点的横坐标 $x_0=\frac{x_1+2}{2}=\frac{1}{2}|AF|$，即线段 AF 的中点到 y 轴的距离是 $\frac{1}{2}|AF|$，所以以线段 AF 为直径的圆与 y 轴相切，故 C 正确；$|PQ|^2=|y_1-y_2|^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=64m^2+64$，$|AF||BF|=(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=(my_1+2)(my_2+2)+2(my_1+2+my_2+2)+4=m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16=-16m^2+4m\cdot 8m+16=16m^2+16$，所以 $|PQ|^2=4|AF||BF|$，故 D 正确. 故选 BCD.

12. BCD　令 $x=1$，$y=0$，则 $f(1)+f(1)=2f(1)f(0)$，又 $f(1)=\frac{1}{2}$，所以 $f(0)=1$，故 A 错误；令 $x=0$，则 $f(y)+f(-y)=2f(y)$，所以 $f(-y)=f(y)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 B 正确；令 $x=y$，则 $f(2x)+$

$f(0)=2f^2(x)$，所以 $f(2x)+f(0)\geqslant 0$，由于 $x\in\mathbf{R}$，令 $t=2x,t\in\mathbf{R}$，即 $f(t)+f(0)\geqslant 0$，即 $f(x)+f(0)\geqslant 0$，故 C 正确；令 $y=1$，则 $f(x+1)+f(x-1)=2f(x)\cdot f(1)=f(x)$，所以 $f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，所以 $f(x+2)+f(x-1)=0$，所以 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x+6)=-f(x+3)=-[-f(x)]=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数. 令 $x=y=1$，则 $f(2)+f(0)=2f^2(1)$，即 $f(2)+1=\frac{1}{2}$，所以 $f(2)=-\frac{1}{2}$，所以 $f(3)=-f(0)=-1,f(4)=-f(1)=-\frac{1}{2},f(5)=-f(2)=\frac{1}{2},f(6)=f(0)=1$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$，故 $\sum\limits_{i=1}^{37}f(i)=6\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)=\frac{1}{2}$，故 D 正确. 故选 BCD.

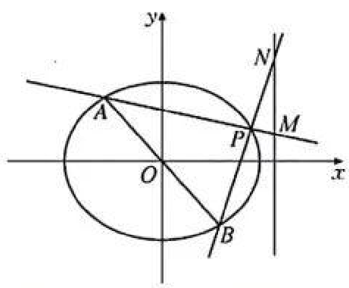
13. $x=3$ 或 $3x+4y-5=0$　将圆 C 的方程化为圆的标准方程 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$，得圆心 $C(1,3)$，半径 $r=2$，当过点 $P(3,-1)$ 的直线斜率不存在时，直线方程为 $x=3$，满足题意；

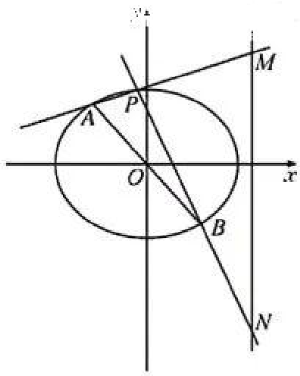
当过点 $P(3,-1)$ 的直线斜率存在时，设直线方程为 $y+1=k(x-3)$，即 $kx-y-3k-1=0$，所以 $\frac{|2k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，所以直线方程为 $3x+4y-5=0$. 综上，直线的方程为 $x=3$ 或 $3x+4y-5=0$.

14. $5\sqrt{2}+6$　易得 F 是 C 的左焦点，记 C 的右焦点为 F_1，又点 P 是 C 右支上的一点，所以 $|PF|-|PF_1|=2a=8$，所以 $|PF|=8+|PF_1|$，所以 $|PA|+|PB|\geqslant|PE|-1+|PF|-1=|PE|+8+|PF_1|-2=|PE|+|PF_1|+6\geqslant|EF_1|+6=\sqrt{(0-5)^2+(5-0)^2}+6=5\sqrt{2}+6$，当且仅当点 P 是线段 EF_1 与 C 的交点，点 A 是线段 PE 与圆 E 的交点，点 B 是线段 PF 与圆 F 的交点时，等号成立，所以 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $5\sqrt{2}+6$.

15. $[8,12]$　设 $P(x,y)$，因为 $|PA|=2|PO|$，所以 $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，整理得 $(x+1)^2+y^2=4$，所以点 P 在以 $E(-1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆上，所以圆 E 与圆 C 有公共点，所以 $|r-2|\leqslant|EC|\leqslant r+2$，又 $|EC|=\sqrt{(7+1)^2+(-6)^2}=10$，所以 $|r-2|\leqslant 10\leqslant r+2$，解得 $8\leqslant r\leqslant 12$，即 r 的取值范围是 $[8,12]$.

16. $\frac{5}{3}$　因为 $S_1=S_2$，所以 $\frac{1}{2}\sin\angle APB\cdot|PA||PB|=\frac{1}{2}\sin\angle MPN\cdot|PN||PM|$.





由图知：当 P 位置变化时，$\angle APB=\angle MPN$ 或 $\angle APB+\angle MPN=\pi$，故 $\sin\angle APB=\sin\angle MPN$，所以 $|PA||PB|=|PN||PM|$，而直线 AP、BP 斜率存在且不为 $0(x_0\neq\pm 1)$，故 $|PA||PB|=\sqrt{1+k_{AP}^2}\cdot|x_0+1|\cdot\sqrt{1+k_{BP}^2}\cdot|x_0-1|$，$|PN||PM|=\sqrt{1+k_{AP}^2}\cdot|x_0-3|\cdot\sqrt{1+k_{BP}^2}\cdot|x_0-3|$，所以 $|x_0^2-1|=(x_0-3)^2$，当 $x_0^2\geqslant 1$ 时，$|x_0^2-1|=x_0^2-1=(x_0-3)^2=x_0^2-6x_0+9$，解得 $x_0=\frac{5}{3}$；当 $x_0^2<1$ 时，$|x_0^2-1|=1-x_0^2=(x_0-3)^2=x_0^2-6x_0+9$，即 $x_0^2-3x_0+4=0$，显然 $\Delta=9-16<0$，无解. 所以 $x_0=\frac{5}{3}$.

17. 解：(1) 因为 $2\sqrt{3}a\sin B=(b+c+a)(b+c-a)$，所以 $2\sqrt{3}a\sin B=(b+c)^2-a^2=b^2+c^2-a^2+2bc$，

由余弦定理得 $2\sqrt{3}a\sin B=2bc\cos A+2bc$，所以 $\sqrt{3}a\sin B=b\cos A+b$. ………………………………… 2 分

由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B\cos A+\sin B$，又 $B\in(0,\pi)$，

所以 $\sin B>0$，所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，…………………………………… 3 分

所以$\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. …………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$，所以$-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

(2)因为 $\sin C=4\sin B$，由正弦定理得 $c=4b$，…………………………………… 6 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，所以 $13=b^2+(4b)^2-2b\cdot 4b\cos\frac{\pi}{3}$，解得 $b=1$，所以 $c=4b=4$，

…………………………………………………………………………………… 8 分

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times4\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

18. 解：(1)当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-3+4$，解得 $a_1=-1$；…………………………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_n=2a_n-3n+4$，得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-3(n-1)+4$，

两式相减得 $a_n=2a_{n-1}+3$，所以 $a_n+3=2(a_{n-1}+3)$，

又 $a_1+3=2$，所以$\{a_n+3\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，……………………… 4 分

所以 $a_n+3=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-3$. ……………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=|a_n-n|=|2^n-n-3|$，令 $c_n=2^n-n-3$，

所以 $c_{n+1}-c_n=2^{n+1}-(n+1)-3-(2^n-n-3)=2^n-1>0$，所以$\{c_n\}$为递增数列，

又 $c_1=-2$，$c_2=-1$，$c_3=2$，故当 $n\geqslant3$ 时，$c_n>0$，

所以 $b_n=|2^n-n-3|=\begin{cases}n+3-2^n, n<3,\\ 2^n-n-3, n\geqslant3,\end{cases}$ ……………………………… 7 分

记$\{c_n\}$的前 n 项和为 M_n，

所以 $M_n=(2-4)+(2^2-5)+\cdots+(2^n-n-3)=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-(4+5+\cdots+n+3)$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-\frac{n(n+7)}{2}=2^{n+1}-\frac{n^2+7n+4}{2}$ ……………………………… 8 分

当 $n<3$ 时，$T_n=-M_n=-2^{n+1}+\frac{n^2+7n+4}{2}$；…………………………………… 9 分

当 $n\geqslant3$ 时，$T_n=-c_1-c_2+c_3+c_4+\cdots+c_n=-M_2+M_n-M_2=M_n-2M_2=2^{n+1}-\frac{n^2+7n-8}{2}$. …… 11 分

综上，$T_n=\begin{cases}-2^{n+1}+\frac{n^2+7n+4}{2}, n<3,\\ 2^{n+1}-\frac{n^2+7n-8}{2}, n\geqslant3.\end{cases}$ ………………………………… 12 分

19. (1)解：依题意，直线 AB 的斜率必定存在，设其斜率为 k，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以 $x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$，$x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$，所以$(x_1+x_2)(x_1-x_2)-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$，

又$\frac{x_1+x_2}{2}=-1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=2$，所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=-1$，…………………………… 4 分

故直线 AB 的方程为 $y-2=-1\times(x+1)$，即 $y=-x+1$，经检验，符合题意，

所以直线 AB 的方程为 $y=-x+1$. ………………………………………………… 6 分

(2)证明：由$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=-x+1\end{cases}$得 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-3$，所以 $A(-3,4)$，$B(1,0)$. ………… 7 分

线段 AB 中垂线的方程为 CD：$y=x+3$，…………………………………………… 8 分

设 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

由$\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=x+3\end{cases}$得 $x^2-6x-11=0$，所以 $x_3+x_4=6$，$x_3x_4=-11$，……………………… 9 分

故 CD 的中点 $M(3,6)$，所以 $|CD|=\sqrt{1+1}\times\sqrt{36+44}=4\sqrt{10}$，

$|MA|=|MB|=\sqrt{(3-1)^2+(6-0)^2}=2\sqrt{10}=\frac{1}{2}|CD|$，

所以 A,B,C,D 在以 M 为圆心，$2\sqrt{10}$ 为半径的圆上，

所以 A,B,C,D 四点共圆. …………………………………………………… 12 分

20.（1）证明：连接 AC，记 $AC\cap BD=O$，连接 A_1O，如图所示.

因为 $AB=AD=2$ 且 $\angle BAD=60^\circ$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $BD=2$.

在 $\triangle A_1AB$ 中，由余弦定理可得 $A_1B^2=A_1A^2+AB^2-2A_1A\cdot AB\cdot\cos\angle A_1AB$

$=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$，所以 $A_1B=\sqrt{7}$，同理可得 $A_1D=\sqrt{7}$.

又 $AC\perp BD$，即 $\angle AOB=90^\circ$，所以 $OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，$AC=2\sqrt{3}$.

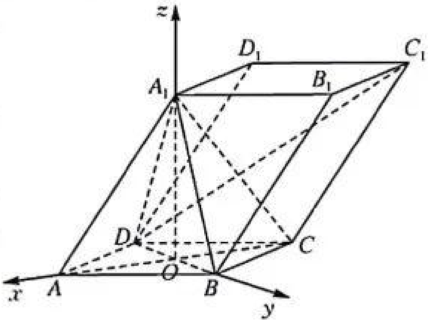
因为 $A_1B=A_1D=\sqrt{7}$，O 是 BD 的中点，所以 $A_1O\perp BD$. ……… 2 分

又 $A_1A=3$，所以 $A_1O=\sqrt{A_1D^2-DO^2}=\sqrt{6}$，所以 $A_1A^2=A_1O^2+AO^2$，所以 $A_1O\perp AC$. …………………………………… 3 分

又 $AC\cap BD=O$，$AC,BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

…………………………………………………………… 5 分

又 $A_1O\subset$ 平面 A_1BD，所以平面 $A_1BD\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 6 分



（2）解：由（1）可知 OA,OB,OA_1 两两垂直，故以 O 为坐标原点，OA，OB，OA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示：

所以 $A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{6})$，设 $C_1(a,b,c)$，因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$，

所以 $(-2\sqrt{3},0,0)=(a,b,c-\sqrt{6})$，所以 $C_1(-2\sqrt{3},0,\sqrt{6})$，

所以 $\overrightarrow{DC_1}=(-2\sqrt{3},1,\sqrt{6})$，$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DA_1}=(0,1,\sqrt{6})$.

设平面 A_1DC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=-\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=y+\sqrt{6}z=0,\end{cases}$ 令 $y=\sqrt{6}$，解得 $x=\sqrt{2}$，$z=-1$，所以平面 A_1DC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$，…………………………………………………… 8 分

设直线 DC_1 与平面 A_1DC 所成角的大小为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC_1}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}|}{|\boldsymbol{n}|\,|\overrightarrow{DC_1}|}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2+6+1}\times\sqrt{12+1+6}}=\frac{2\sqrt{114}}{57}$，

即直线 DC_1 与平面 A_1DC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{114}}{57}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：（1）由题意知 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ \frac{1}{2}\cdot2a\cdot b=3\sqrt{3},\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ …………………………………………………… 2 分

解得 $a=3$，$b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{6}$，…………………………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… 4 分

（2）设点 P 的坐标为 (m,n)，$(m\neq\pm3)$，则 $\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{3}=1$，即 $9-m^2=3n^2$；

又 A 点坐标为 $(-3,0)$，故直线 AP 的方程为 $y=\frac{n}{m+3}(x+3)$.

令 $x=4$，可得 $y_G=\frac{7n}{m+3}$，即点 G 的坐标为 $\left(4,\frac{7n}{m+3}\right)$，…………………………………… 5 分

又 B 点坐标为 $(3,0)$，故直线 BG 的斜率 $k_{BG}=\dfrac{\frac{7n}{m+3}}{4-3}=\dfrac{7n}{m+3}$，

又直线 l 的斜率 k_l 满足 $k_l\times k_{BG}=-1$，则 $k_l=-\dfrac{m+3}{7n}$，故直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{m+3}{7n}x$，

又因为直线 BP 的斜率为 $\dfrac{n}{m-3}$，故直线 BP 的方程为 $y=\dfrac{n}{m-3}(x-3)$. ……………………………… 7 分

由 $\begin{cases} y=\dfrac{n}{m-3}(x-3), \\ y=-\dfrac{m+3}{7n}x \end{cases}$ 得 $\dfrac{n}{m-3}(x-3)=-\dfrac{m+3}{7n}x$，

所以 $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{7n^2}{9-m^2}=\dfrac{7n^2}{3n^2}=\dfrac{7}{3}$，解得 $x=\dfrac{21}{4}$，即 $x_F=\dfrac{21}{4}$，…………………………………………… 10 分

所以 $\dfrac{|BE|}{|BF|}=\dfrac{\sqrt{1+k_{BP}^2}\,|x_B-x_E|}{\sqrt{1+k_{BP}^2}\,|x_B-x_F|}=\left|\dfrac{x_B-x_E}{x_B-x_F}\right|=\dfrac{|3-0|}{\left|3-\frac{21}{4}\right|}=\dfrac{4}{3}$，即 $\left|\dfrac{BE}{BF}\right|$ 为定值，该定值为 $\dfrac{4}{3}$. …… 12 分

22. (1)解：若 $a=1$，$f(x)=e^{2x}-x^2$，所以 $f'(x)=2e^{2x}-2x$，……………………………………………… 1 分

所以 $f'(0)=2$，又 $f(0)=1$，……………………………………………………………………………… 2 分

所以函数 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$. ………………… 4 分

(2)证明：由题意知 $f'(x)=2(e^{2x}-ax)$，令 $m(x)=e^{2x}-ax$，所以 $m'(x)=2e^{2x}-a$，

令 $m'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$. …………………………………………………………………… 5 分

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$m'(x)>0$，函数 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $m(x)>m(0)=1$，

所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时不存在极大值，不符合题意；…………… 7 分

当 $a>2$ 时，令 $m'(x)>0$，解得 $x>\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$，令 $m'(x)<0$，解得 $x<\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

所以 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极大值点 x_0，所以 $f'\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}\right)=a-a\ln\dfrac{a}{2}<0$，解得 $a>2e$. ………… 9 分

令 $h(x)=x-\ln x$，所以 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=1$，所以 $x>\ln x$.

因为 $f'(0)=2>0$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2e-a<0$，$f'(\ln a)=2e^{2\ln a}-2a\ln a=2a(a-\ln a)>0$，

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}<\ln a$，

所以存在 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，使得 $f'(x_1)=2e^{2x_1}-2ax_1=0$，

存在 $x_2\in\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},\ln a\right)$，使得 $f'(x_2)=0$，…………………………………………………… 10 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递增，在区间 (x_1,x_2) 上单调递减，在区间 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x=x_1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，所以 $f(x_0)=f(x_1)=e^{2x_1}-ax_1^2$，$0<x_1<\dfrac{1}{2}$，…………… 11 分

由 $2e^{2x_1}-2ax_1=0$，$e^{2x_1}=ax_1$，所以 $f(x_0)=e^{2x_1}-ax_1^2=-a\left(x_1-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{a}{4}<\dfrac{a}{4}$，即 $f(x_0)<\dfrac{a}{4}$.

……… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：zizzsw。