2024 届高三第二学期期初质量监测

数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效.

3．本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．有8位同学一次数学测试的分数分别是：111，118，125，130，130，132，136，140，则这组数据的75百分位数是

A．130　　B．132　　C．134　　D．136

【答案】C

【解析】$8\times 75\%=6$，$\dfrac{132+136}{2}=134$，选C.

2．若$z\in\mathbf{C}$，且$\dfrac{z-1}{z+1}$是纯虚数，则$|z|=$

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

【答案】B

【解析】$\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{a+bi-1}{a+bi+1}=\dfrac{(a-1)+bi}{(a+1)+bi}=\dfrac{[(a-1)+bi][(a+1)-bi]}{(a+1)^2+b^2}=\dfrac{a^2+b^2-1+2bi}{(a+1)^2+b^2}$为纯虚数，$a^2+b^2-1=0$，即$a^2+b^2=1$，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$.

3．已知$\vec{a},\vec{b}$均为单位向量，若$|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$　　D．$\frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】D

【解析】$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{\frac{1}{2}}{1}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}$，选 D.

4．设l,m是不同的直线，α，β是不同的平面，则

A．若$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则$l\parallel m$

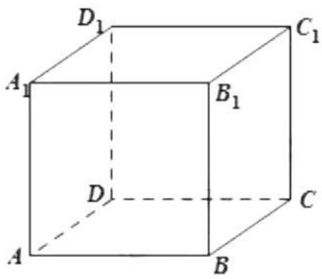
B．若$l\parallel m$，$m\perp\beta$，$l\perp\alpha$，则$\alpha\parallel\beta$

C．若$\alpha\perp\beta$，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则$l\perp m$

D．若$\alpha\perp\beta$，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，则$l\parallel m$

【答案】B

【解析】对于 A，如图，设平面$ABCD$为平面α，平面$A_1B_1C_1D_1$为平面β，AB为m，B_1C_1为l满足$\alpha\parallel\beta$，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，但l与m不平行，A 错.



对于 C，设平面$ABCD$为平面α，平面BCC_1B_1为平面β，B_1C_1为l，A_1D_1为m，满足$\alpha\perp\beta$，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，但l与m不垂直，C 错.

对于 D，设平面$ABCD$为平面α，平面BCC_1B_1为平面β，B_1C_1为l，DD_1为m，满足$\alpha\perp\beta$，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，但l与m不平行，D 错，选 B.

5．某台小型晚会由5个节目组成，演出顺序有如下要求，节目甲必须排在前两位，节目乙不

能排在第一位，则该台晚会节目演出顺序的编排方案共有

A．36种　　B．42种　　C．48种　　D．54种

【答案】B

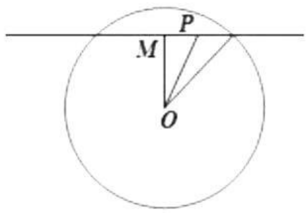
【解析】甲在第一位有A_4^4个结果，甲在第二位有$C_3^1A_3^3$个结果，$A_4^4+C_3^1A_3^3=42$，选B.

6．设直线$x-ky-1=0$被圆$x^2+y^2=2$所截得的弦的中点为$M(x_0,y_0)$，则x_0+y_0的最大值为

A．$\sqrt{2}+1$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

【答案】C

【解析】直线$x-ky-1=0$过定点$(1,0)$，M在OP为直径的圆上，



以OP为直径的圆：$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，$x_0+y_0=b$，即$x_0+y_0-b=0$，

即(x_0,y_0)是$x+y-b=0$与圆$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$的交点，

$\therefore\dfrac{\left|\dfrac{1}{2}-b\right|}{\sqrt{2}}\le\dfrac{1}{2}$，$b\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$，选C.

7．已知α为锐角，且$\tan\alpha+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{5}{3}$，则$\dfrac{\sin2\alpha+1}{\cos2\alpha}=$

A．-3　　B．-2　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

【答案】A

【解析】$\tan\alpha+\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{5}{3}$，$\therefore\tan\alpha=2$或$-\dfrac{1}{3}$，$\alpha$为锐角，$\tan\alpha=2$，

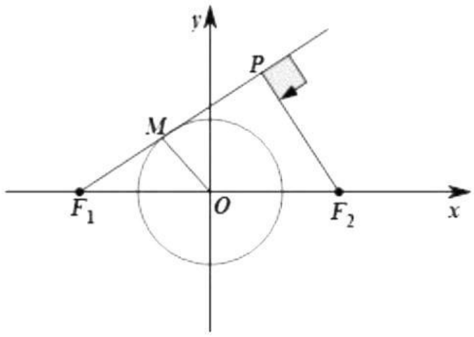
$\dfrac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{3}{-1}=-3$，选 A.

8．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，以$C$的实轴为直径的圆记为$D$，过点$F_1$作$D$的切线与$C$在第一象限交于点$P$.若$\triangle PF_1F_2$的面积为$4a^2$，则$C$的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　B．$\sqrt{5}-1$　　　C．$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　　　D．$\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】如图，PF_1为圆O的切线，切点为M，



$S_{\triangle PF_1F_2}=4a^2$，$\therefore PF_1=4a$，$PF_2=2a$，$OM$为中位线，

$PF_1^2+PF_2^2=4c^2$，$\therefore 20a^2=4c^2$，$\therefore e^2=5$，$e=\sqrt{5}$，选 D.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．已知函数$f(x)=(\sin x+\cos x)^2+\sqrt{3}\cos 2x$，则

A．$f(x)$的最小正周期为π

B．$f(x)$的一个对称中心为$\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$

C．$f(x)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减

D．$f(x)$在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上有3个零点

【答案】AC

【解析】$f(x)=1+\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，$T=\pi$，A对，

对称中心纵坐标为1，B错.

$\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{7\pi}{12}$，即$f(x)$的一个单调减区间为$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7}{12}\pi\right]$

而$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\subset\left[\frac{\pi}{12},\frac{7}{12}\pi\right]$，$\therefore f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\swarrow$，C对.

$f(x)=0$，则$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{7}{6}\pi+2k\pi$或$\frac{11}{6}\pi+2k_1\pi$

$\therefore x=\frac{5}{12}\pi+k\pi$或$\frac{3}{4}\pi+k_1\pi,k\in\mathbf{Z},k_1\in\mathbf{Z}$.

$k_1=-1$，$x=-\frac{\pi}{4}$；$k=0$，$x=\frac{5\pi}{12}$；$k_1=0$，$x=\frac{3}{4}\pi$；$k_1=1$，$x=\frac{17\pi}{12}$，4个零点，D错.选AC.

10．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为4，E,F,G分别是棱BC，C_1D_1，BB_1的中点，则

A．$AE\perp$平面BB_1F

B．$\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{B_1D_1}$共面

C．平面C_1DG截正方体所得截面的面积为$12\sqrt{2}$

D．三棱锥$A-C_1D_1G$的体积为$\frac{16}{3}$

【答案】ABD

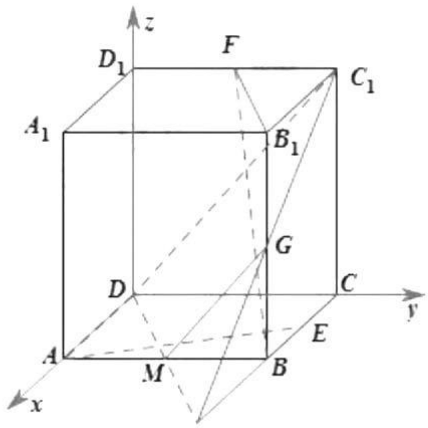
【解析】$AE\perp BB_1$，$\overrightarrow{B_1F}=(-4,-2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，

$AE\perp B_1F$，$\therefore AE\perp$面BB_1F，A对.

$\overrightarrow{C_1E}=(2,0,-4)$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-4,-4,0)$，$\overrightarrow{BF}=(-4,-2,4)$，

若$\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{BF},\overrightarrow{B_1D_1}$共面，则$\overrightarrow{C_1E}=x\overrightarrow{BF}+y\overrightarrow{B_1D_1}$，$\therefore\begin{cases}2=-4x-4y\\0=-2x-4y\\-4=4x\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x=-1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{C_1E}=-\overrightarrow{BF}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}$，B 对.



如图截面为等腰梯形MGC_1D，$DC_1=4\sqrt{2}$，$MG=2\sqrt{2}$，$DM=C_1G=2\sqrt{5}$，

$\dfrac{DC_1-MG}{2}=\sqrt{2}$，梯形的高$\sqrt{20-2}=3\sqrt{2}$，梯形面积$\dfrac{(4\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times3\sqrt{2}}{2}=18$，C 错.

$V_{A-C_1D_1G}=V_{B-C_1D_1G}=V_{D_1-BC_1G}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle BC_1G}\cdot D_1C_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\times4=\dfrac{16}{3}$，D 对，选 ABD.

11．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(xy)=xf(y)+yf(x)$，则

A．$f(1)=1$

B．$f(x)$是奇函数

C．若$f(2)=2$，则$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

D．若当$x>1$时，$f(x)<0$，则$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$单调递减

【答案】BCD

【解析】方法一：$x=y=1$时，$f(1)=f(1)+f(1)$，$\therefore f(1)=0$．A 错

$x=y=-1$时，$f(1)=-f(-1)-f(-1)$，$\therefore f(-1)=0$，

$y=-1$，$f(-x)=xf(-1)-f(x)=-f(x)$，$f(x)$为奇函数，B 对.

$x=2$，$y=\dfrac{1}{2}$，$\therefore f(1)=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f(2)$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，C 对.

$xy\neq 0$时，$\dfrac{f(xy)}{xy}=\dfrac{f(y)}{y}+\dfrac{f(x)}{x}$，$\therefore g(xy)=g(x)+g(y)$，

$0<x_1<x_2$时，$g(x_2)-g(x_1)=g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，$0<x_1<x_2$时，$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，

$g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)<0$，$\therefore g(x_2)-g(x_1)<0$，即$g(x_2)<g(x_1)$，

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)\swarrow$，D 对，选 BCD.

方法二：令$x=y=1\Rightarrow f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$，A 错.

令$x=y=-1\Rightarrow f(1)=-f(-1)-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$

原式中令$y=-1\Rightarrow f(-x)=-f(x)$，锤子数学解析 打印 Q 群 742511557$\therefore f(x)$是奇函数，B 正确.

原式中令$x=2,y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2f\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f(2)=0\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，C 正确.

对于 D，由$f(xy)=xf(y)+yf(x)\Rightarrow\dfrac{f(xy)}{xy}=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(y)}{y}\Rightarrow g(xy)=g(x)+g(y)$

任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1<x_2$，则$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，$\therefore f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)<0$，

$\therefore g(x_2)-g(x_1)=g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\cdot x_1\right)-g(x_1)=g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)+g(x_1)-g(x_1)=g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)<0$，

$\therefore g(x_2)<g(x_1)$，$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上$\swarrow$，D 正确，选：BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且$a_2a_5^2=4$.设$b_n=\log_2 a_n$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，则$S_7=$__________.

【答案】$\dfrac{14}{3}$

【解析】$\{a_n\}$为等比数列，$a_2a_5^2=4$，$\therefore a_4^3=4$，即$a_4=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$，

$\{b_n\}$为等差数列，$S_7=7b_4=7\log_2 a_4=7\times\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$.

13．已知随机变量$X\sim N(2,\sigma^2)$，且$P(X\le a)=P(X\ge 1)$，则$\left(x-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中常数项为__________.

【答案】1215

【解析】$X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(X\le a)=P(X\ge 1)$，$\therefore\frac{a+1}{2}=2$，$\therefore a=3$.

$\left(x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$展开式第$r+1$项$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r x^{6-r}(-3)^r x^{-\frac{1}{2}r}=C_6^r(-3)^r x^{6-\frac{3}{2}r}$

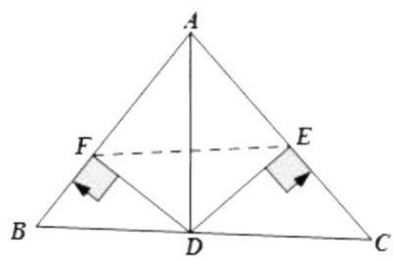
$r=4$，$C_6^4(-3)^4=15\times 81=1215$.

14．在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$\angle BAC=\frac{\pi}{4}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，点D,E,F分别在BC,CA,AB边上，且$DE\perp AC$，$DF\perp AB$，则EF的最小值为__________.

【答案】$\sqrt{6}$

【解析】A,F,D,E四点共圆，EF最小时，AD最小，$AD\perp BC$时，AD最小，$AD=2\sqrt{3}$，

$\frac{EF}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{3}$，$\therefore EF=\sqrt{6}$.



四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13分）不透明的袋子中有8个除所标数字外均相同的球，其中标号为1号的球有3个，标号为2号的球有3个，标号为3号的球有2个.现从这8个球中任选2个球.

（1）求选出的这2个球标号相同的概率；

（2）设随机变量 X 为选出的2个球标号之差的绝对值，求 X 的分布列与数学期望.

【解析】

（1）$P=\dfrac{C_3^2+C_3^2+C_2^2}{C_8^2}=\dfrac{7}{28}=\dfrac{1}{4}$.

（2）X 的所有可能取值为 $0,1,2$，

$P(X=0)=\dfrac{1}{4}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^1+C_3^1\cdot C_2^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_8^2}=\dfrac{6}{28}=\dfrac{3}{14}$.

X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{14}$

X 的数学期望 $E(X)=\dfrac{15}{28}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{27}{28}$.

16.（15分）已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+2\ln(1-x)$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=2\ln2-3$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间，并证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有零点.

【解析】

（1）$f'(x)=a-\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{-2}{1-x}$，

由题意知 $\begin{cases}f(-1)=-a-b+2\ln2=2\ln2-3\\ f'(-1)=a-b-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.

（2）$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{1-x}=\frac{2x^2(1-x)-(1-x)-2x^2}{x^2(1-x)}$

$=\frac{-2x^3+x-1}{x^2(1-x)}=\frac{-(x+1)(2x^2-2x+1)}{x^2(1-x)}$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$上↗；$(-1,0)$和$(0,1)$上↙，

$f(x)$的单增区间为$(-\infty,-1)$，单减区间为$(-1,0),(0,1)$，

$f(x)$在$(-\infty,-1)$上↗；$(-1,0)$上↙，$f(x)=2x+\frac{1}{x}+2\ln(1-x)$，

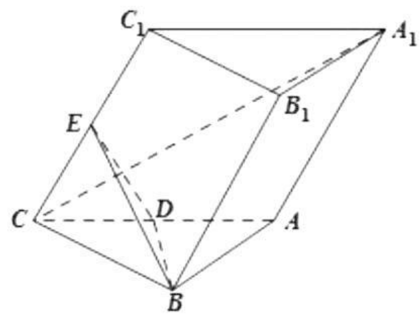
$\therefore x\in(-\infty,0)$时，$f(x)\le f(-1)=-2-1+2\ln 2=-3+2\ln 2<0$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,0)$上没有零点.

17.（15分）如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，$\triangle ABC$为等边三角形，$AC=CC_1=2$，$\angle ACC_1=60^\circ$，D,E分别是棱AC,CC_1的中点.

（1）求证：$A_1C\perp$平面BDE；

（2）若P为线段B_1C_1上的动点（不包括端点），求平面PBD与平面BDE夹角的余弦值的取值范围.



【解析】

（1）证明：$\because\triangle ABC$为等边三角形，D为AC中点，$\therefore BD\perp AC$，

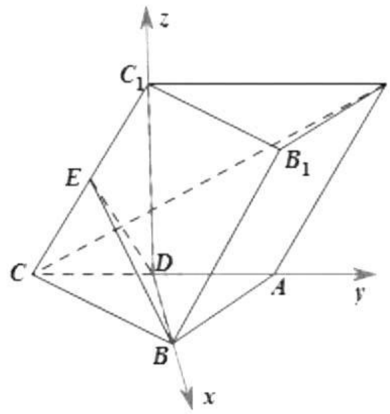
又$\because$平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，

$\therefore BD\perp$平面AA_1C_1C，$\therefore BD\perp A_1C$，又$\because$四边形AA_1C_1C为菱形

$\therefore A_1C\perp AC_1$，$\therefore A_1C\perp DE$，$BD\cap DE=D$，

$\therefore A_1C \perp$ 平面 BDE .

（2）如图建系，$\therefore B(\sqrt{3},0,0)$ ，$D(0,0,0)$ ，$E\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，$C_1(0,0,\sqrt{3})$



设 $\overrightarrow{C_1P}=\lambda\overrightarrow{C_1B_1}=\lambda\overrightarrow{CB}=\lambda(\sqrt{3},1,0)=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,0)$ ，$\lambda\in(0,1)$ ，

$\therefore \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{C_1P}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda,\sqrt{3})$ ，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0)$ ，$\overrightarrow{DE}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

设平面 PBD 与平面 BDE 的一个法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$ ，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$ ，

$$\therefore \begin{cases}\sqrt{3}\lambda x_1+\lambda y_1+\sqrt{3}z_1=0\\ \sqrt{3}x_1=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(0,-\sqrt{3},\lambda)\ ,$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}x_2=0\\ -\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,\sqrt{3},1)\ ,$$

设平面 PBD 与平面 BDE 夹角锤子数学解析 打印 Q 群 742511557 为 θ ，

$$\therefore \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{3-\lambda}{\sqrt{3+\lambda^2}\cdot 2}\overset{\text{令}3-\lambda=t,t\in(2,3)}{=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\frac{t}{2\sqrt{t^2-6t+12}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{\frac{12}{t^2}-\frac{6}{t}+1}}\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

18.（17 分）设抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ ，过焦点 F 的直线与 C 交于点 A,B 当直线 AB 垂直于 x 轴时，$|AB|=2$.

（1）求C的方程；

（2）已知点$P(1,0)$，直线AP,BP分别与C交于点C,D.

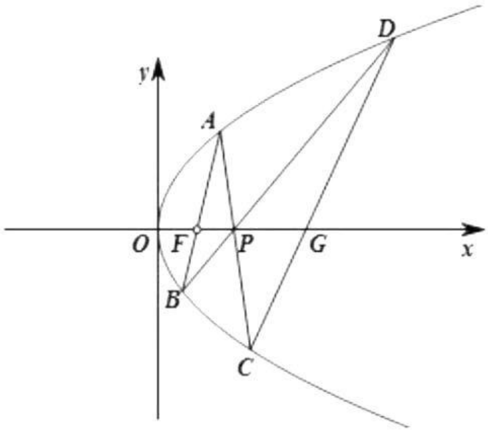
①求证：直线CD过定点；

②求$\triangle PAB$与$\triangle PCD$面积之和的最小值.

【解析】

（1）$2p=2$，$p=1$，$\therefore C$的方程为$y^2=2x$.

（2）①设直线AB方程为$x=my+\frac{1}{2}$，$A\left(\frac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{2},y_2\right)$，$C\left(\frac{y_3^2}{2},y_3\right)$，$D\left(\frac{y_4^2}{2},y_4\right)$



$\begin{cases}x=my+\frac{1}{2}\\ y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2my-1=0$，$\therefore y_1y_2=-1$

同理$y_1y_3=-2p\cdot 1=-2$，$\therefore y_3=\frac{-2}{y_1}$，$y_2y_4=-2\Rightarrow y_4=-\frac{2}{y_2}$

设CD与x轴交于点G，$\therefore y_3\cdot y_4=-2px_G\Rightarrow\frac{4}{y_1y_2}=-2x_G\Rightarrow x_G=2$，

$\therefore$直线CD过定点$(2,0)$.

②$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|y_1-y_2|+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left|\frac{2}{y_1}-\frac{2}{y_2}\right|$

$=\frac{5}{4}|y_1-y_2|=\frac{5}{4}\sqrt{4m^2+4}\geq\frac{5}{2}$，当且仅当$m=0$时取“=”.

19.（17分）对于数列$\{a_n\}$，若存在正数k，使得对任意$m,n\in\mathbf{N}^*$，$m\neq n$，都满足

$|a_m-a_n|\le k|m-n|$，则称数列$\{a_n\}$符合“$L(k)$条件”.

（1）试判断公差为2的等差数列$\{a_n\}$是否符合“$L(2)$条件”？

（2）若首项为1，公比为q的正项等比数列$\{a_n\}$符合“$L\left(\frac{1}{2}\right)$条件”.

①求q的取值范围；

②记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，证明：存在正数k_0，使得数列$\{S_n\}$符合“$L(k_0)$条件”.

【解析】

（1）$a_n=2n+t$，$|a_m-a_n|=2|m-n|\le 2|m-n|$，

$\therefore$公差为2的等差数列$\{a_n\}$符合$L(2)$条件.

（2）①$a_n=1\cdot q^{n-1}=q^{n-1}$，$\because |a_m-a_n|\le\frac{1}{2}|m-n|$对$\forall m,n\in\mathbf{N}^*$，$m\ne n$恒成立，

$\therefore |q^{m-1}-q^{n-1}|\le\frac{1}{2}|m-n|$，

若$q=1$，则$0\le\frac{1}{2}|m-n|$，符合.

若$q>1$，$\because$数列$\{a_n\}\nearrow$，不妨设$m<n$，

$\therefore a_n-a_m\le\frac{1}{2}(n-m)$，$\therefore a_n-\frac{1}{2}n\le a_m-\frac{1}{2}m$（*）

设$b_n=a_n-\frac{1}{2}n$，由（*）式中的m,n任意性得数列$\{b_n\}$不递增，

$\therefore b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n-\frac{1}{2}=q^{n-1}(q-1)-\frac{1}{2}\le 0$，$n\in\mathbf{N}^*$，

但当$n>1-\log_q[2(q-1)]$，$q^{n-1}(q-1)-\frac{1}{2}>0$，矛盾.

若$0<q<1$，则数列$\{a_n\}$单调递减，不妨设$m<n$，

$\therefore a_m-a_n\le\frac{1}{2}(n-m)$，即$a_m+\frac{1}{2}m\le a_n+\frac{1}{2}n$（**）

设$c_n=a_n+\frac{1}{2}n$，由(**)式中m,n的任意性得，锤子数学解析 打印Q群742511557 数列$\{a_n\}$

不递减

$\therefore c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}-a_n)+\frac{1}{2}=q^{n-1}(q-1)+\frac{1}{2}\geq 0$，$n\in\mathbf{N}^*$

$\because 0<q<1$时，$f(n)=q^{n-1}(q-1)+\frac{1}{2}$单调递增，

$\therefore f(n)_{\min}=f(1)=q-1+\frac{1}{2}\geq 0$，$\because 0<q<1$，$\therefore \frac{1}{2}\leq q<1$

综上：公比q的取值范围为$\left[\frac{1}{2},1\right]$.

（3）由（2）得，$S_n=\frac{1-q^n}{1-q},\frac{1}{2}\leq q<1$，

当$q=1$时，$S_n=n$，要存在k_0使得$|S_n-S_m|\leq k_0|n-m|$，只需$k_0\geq 1$即可！

当$\frac{1}{2}\leq q<1$时，要证数列$\{S_n\}$符合“$L(k_0)$条件”，

只要证存在k_0，使得$\left|\frac{1-q^n}{1-q}-\frac{1-q^m}{1-q}\right|\leq k_0|n-m|$，$n\in\mathbf{N}^*$

不妨设$m<n$，则只要证：$q^m-q^n\leq k_0(1-q)(n-m)$

只要证：$q^m+k_0(1-q)^m\leq q^n+k_0(1-q)^n$

设$g(n)=q^n+k_0(1-q)n$，由m,n的任意性，$g(n)$单调不减

只要证$g(n+1)-g(n)=q^n(q-1)+k_0(1-q)\geq 0$

只要证：$k_0\geq q^n,n\in\mathbf{N}^*$，

$\because \frac{1}{2}\leq q<1$，$\therefore$存在$k_0\geq q$上式对$\forall n\in\mathbf{N}^*$成立.

$\therefore$存在正数k_0使数列$\{S_n\}$符合$L(k_0)$条件.

关于我们