

高三数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

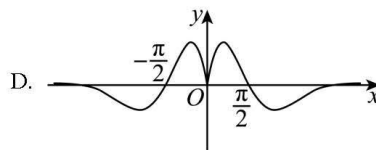
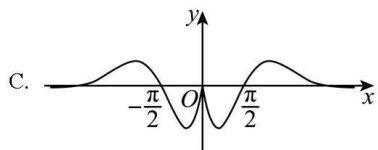
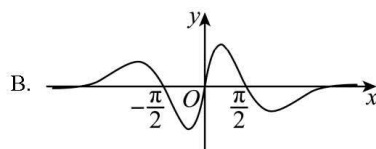
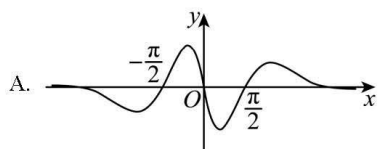
1. 设集合 $A = \{x | \log_2 x < 0\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, 则 $\partial_b A =$ ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-1, 0]$ C. $(-1, 2)$ D. $[-1, 0] \cup [1, 2]$

2. 已知复数 $z_1 = 1 - i$, $z_2 = a + i$, 若 $z_1 \cdot z_2$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为 ()

- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

3. 函数 $f(x) = \frac{x \cos x}{e^{|x|}}$ 的图象大致为 ()



4. 已知 α, β 是空间两个不同的平面, m, n 是空间两条不同的直线, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m // \alpha$, $n // \beta$, 且 $m // n$, 则 $\alpha // \beta$
 B. 若 $m // \alpha$, $n // \beta$, 且 $m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $m \perp \alpha$, $n // \beta$, 且 $m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$
 D. 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 且 $m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$

5. 已知角 θ 的始边为 x 轴非负半轴, 终边经过点 $(3, \sqrt{3})$, 将角 θ 的终边顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后得到角 β , 则 $\tan \beta =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

6. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 过 E 上的一点 A 作 l 的垂线, 垂足为 B , 若 $|AB| = 3|OF|$ (O 为坐标原点), 且 $\triangle ABF$ 的面积为 $12\sqrt{2}$, 则 E 的方程为 ()

- A. $y^2 = 4x$ B. $y^2 = 4\sqrt{3}x$ C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 8\sqrt{3}x$

7. 一个轴截面是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形的圆锥型封闭容器内放入一个半径为 1 的小球 O_1 后, 再放入一个球 O_2 , 则球 O_2 的表面积与容器表面积之比的最大值为 ()

- A. $\frac{4}{81}$ B. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{27}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

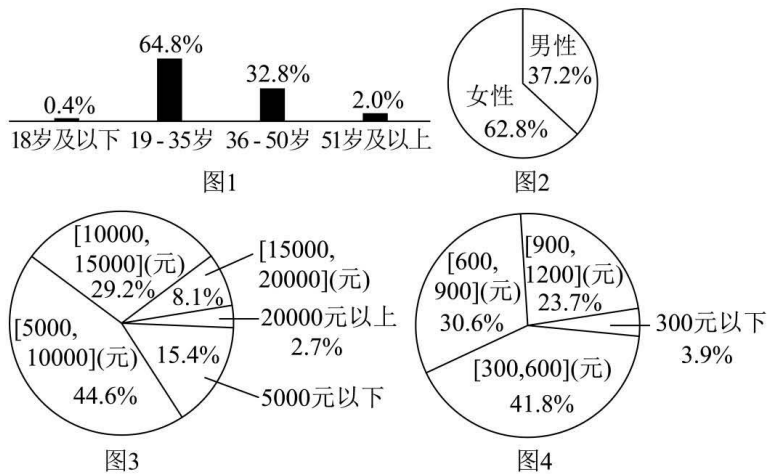
8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$, 且 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, \sin x < \cos x \\ \sin x, \sin x \geq \cos x \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有

4 个不同实根 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 则 $f(x_1) \sin \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}$ 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, 1)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 近年来, 乡村游成为中国国民旅游的热点, 下面图 1, 2, 3, 4 分别为 2023 年中国乡村旅游消费者年龄、性别、月收入及一次乡村旅游花费金额的有关数据分析, 根据该图, 下列结论错误的是 ()



- A. 2023 年中国乡村旅游消费者中年龄在 19~50 岁之间的男性占比超过 $\frac{1}{3}$
- B. 2023 年中国乡村旅游消费者中月收入不高于 1 万元的占比超过 70%
- C. 2023 年中国乡村旅游消费者中一次乡村旅游花费 4 个范围占比的中位数为 30.6%
- D. 2023 年中国乡村旅游消费者一次乡村旅游花费的平均数估计值高于 650 元 (同一花费区间内的数据用其中间值作代表)

10. 若矩形 $ABCD$ 的所有顶点都在椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > 0)$ 上, 且 $|AB| = 2\sqrt{2}$, $|AC| = 2\sqrt{3}$, 点 P 是

E 上与 A, B, C, D 不重合的动点, 则 ()

- A. E 的长轴长为 4
B. 存在点 P , 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = -\frac{1}{2}$
C. 直线 PA, PB 的斜率之积恒为 $-\frac{1}{2}$
D. 直线 PA, PC 的斜率之积恒为 $-\frac{1}{2}$

11. 已知正数 x, y, z 满足 $5^x = 9^y = 15^z$, 则 ()

- A. $xz + 2yz - 2xy = 0$ B. $5x < 9y < 15z$ C. $xy < 2z^2$ D. $9x + 2y < 16z$

12. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CD} + \mu \overrightarrow{CC_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$,

$\mu \in [0, 1]$, 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $\mu = \frac{1}{2}$, 则 P 点轨迹所在直线与平面 A_1CD 平行

B. 若 $\lambda + \mu = 1$, 则 $A_1C \perp BP$

C. 若 $\lambda = \mu$, 则 $|\overrightarrow{DP}| + |\overrightarrow{A_1P}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2}$

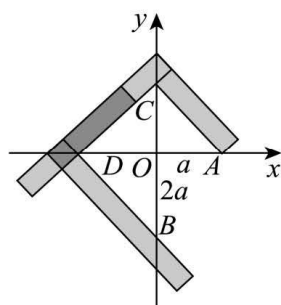
D. 若 BP 与平面 CC_1D_1D 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $\lambda\mu$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -2)$ 处的切线方程为_____.

14. $(x^2 - y^2 - 2y - 1)^5$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为_____. (用数字作答)

15. 求作一个立方体, 使其体积等于已知立方体体积的 2 倍, 这就是历史上有名的立方倍积问题. 1837 年法国数学家阿诺德兹尔证明了立方倍积问题不能只用直尺与圆规作图来完成, 不过人们发现, 跳出直尺与圆规作图的框框, 可以找到不同的作图方法. 如图是柏拉图 (公元前 427—公元前 347 年) 的方法: 假设已知立方体的边长为 a , 作两条互相垂直的直线, 相交于点 O , 在一条直线上截取 $OA = a$, 在另一条直线上截取 $OB = 2a$, 在直线 OB, OA 上分别取点 C, D , 使 $\angle ACD = \angle BDC = 90^\circ$ (只要移动两个直角尺, 使一个直角尺的边缘通过点 A , 另一个直角尺的边缘通过点 B , 并使两直角尺的另一边重合, 则两直角尺的直角顶点即为 C, D), 则线段 OC 即为所求立方体的一边. 以直线 OA, OC 分别为 x 轴、 y 轴建立直角坐标系, 若圆 E 经过点 A, C, D , 则圆 E 的方程为_____.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + \frac{2\pi}{3}$, 集合 $S = \{\sin a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, 若 S 恰有 4 个子集, 则 $S =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

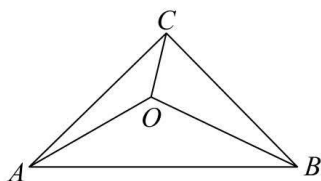
17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 3$, $(n+1)^2 a_{n+1} + (2n+1)S_n = 2$.

(1) 求 S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{n^2(2n-1)S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , A 为锐角, $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

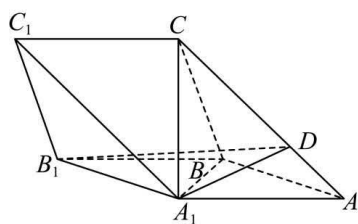
$$4bS = a(b^2 + c^2 - a^2).$$



(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由;

(2) 如图, 若 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $BC = \sqrt{5}$, O 为 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $OC = 1$, $\angle AOC = \frac{3\pi}{4}$, 求 OB 的长.

19. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1A = A_1C = 6$, $A_1C_1 = 6\sqrt{2}$, 平面 $A_1BC \perp$ 平面 AA_1C_1C .



(1) 求证: $BC \perp CC_1$;

(2) 若 $A_1B \perp A_1C$, 三棱锥 $A_1 - ABC$ 的体积为 18, 点 D 在棱 AC 上, 且 $AD = \frac{1}{2}DC$, 求平面 A_1DB_1 与

平面 ABC 夹角的余弦值.

20. 2023 年 5 月 28 日我国具有完全自主知识产权的国产大飞机 C919 开启全球首次商业载客飞行, C919 飞机的研制, 聚集了我国数十万科研人员的心血, 其中 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 等高校为 C919 大飞机做出了重要贡献, 如 A 高校参与了气动总体、结构强度、航电、飞控和液压等设计, 参加人数如下表:

项目	气动总体	结构强度	航电	飞控	液压
参与人数	5	5	3	4	3

B 高校有 8 位教师参加了相关设计论证, 具体如下表:

设计论证	气动总体设计论证	气动外形设计论证	结构强度论证	航电设计论证	液压系统论证	起落架的论证
参与教师	a	b, c	d	e, f	g	h

(1) 某科普博主准备从 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 共 6 所高校中随机选 3 所高校介绍其为 C919 大飞机做出的贡献, 连续 3 天, 每天发布一篇博文, 每篇博文介绍一所高校 (3 天将选中的 3 所高校全部介绍完), 求 C 、 D 被选到, 且 C 在第 2 天被介绍的概率;

(2) 若从 A 高校参与设计的 20 人中随机选 3 人, 在选到航电设计人员的条件下, 求选到气动总体设计人员的概率;

(3) 若从 B 高校参与的 6 个论证项目中随机选取 3 个, 记这 3 个论证项目中 B 高校参与教师人数为 X , 求 X 的分布列与期望.

21. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, A_1, A_2 为 Γ 的左、右顶点, $P\left(\sqrt{7}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为 Γ 上一点,

PA_1 的斜率与 PA_2 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$. 过点 $A(3, 0)$ 且不垂直于 x 轴的直线 l 与 Γ 交于 M, N 两点.

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 若点 E, F 为直线 $x=3$ 上关于 x 轴对称的不重合两点, 证明: 直线 ME, NF 的交点在定直线上.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2\ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 有唯一极值, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a \leq 0$ 时, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 \neq x_2$, 求证: $x_1x_2 < 4$.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 ([网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

