

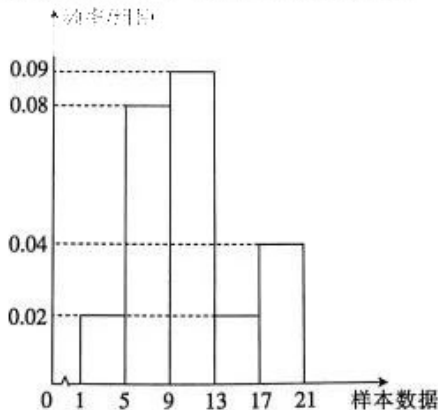
# 高三联考数学

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

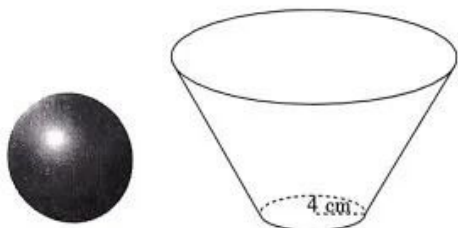
1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - 3x > 0\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$       B.  $\{1, 2, 3\}$       C.  $\{4\}$       D.  $\{0, 3, 4\}$
2. 复数  $z = (-2 + i)(2 + 2i)$  在复平面内对应的点位于  
A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 若直线  $l: y = kx$  与圆  $M: x^2 + (y - 1)^2 = 1$  只有一个公共点, 则  $k =$   
A. -1      B. 1      C. 0      D. 2
4. 有一组样本数据都在区间  $[1, 21]$  内, 将其制成如图所示的频率分布直方图, 估计该组样本数据的平均数为(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)



- A. 10      B. 10.68      C. 10.58      D. 12
5. 已知向量  $\mathbf{a} = (3\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta - 5\cos \theta)$ ,  $\mathbf{b} = (3\sin \theta, \cos \theta)$ ,  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 若  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ , 则  $\tan \theta =$   
A.  $\frac{4}{9}$       B. -1      C.  $\frac{7}{9}$       D.  $\frac{5}{9}$
6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2, & x < 0, \\ -\frac{2x+1}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围为  
A.  $[0, +\infty)$       B.  $(-\infty, 0]$       C.  $(0, +\infty)$       D.  $\mathbf{R}$

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

7. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上, 游回产地产卵. 研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游速  $v$  (单位:  $\text{m/s}$ ) 可以表示为  $v = k \log_3 \frac{O}{100}$ , 其中  $O$  表示鲑鱼的耗氧量的单位数. 若一条鲑鱼游速为  $0.5 \text{ m/s}$  时耗氧量的单位数为 300, 则一条鲑鱼游速为  $2 \text{ m/s}$  时耗氧量的单位数为
- A. 100                      B. 8100                      C. 1200                      D. 900
8. 现准备给一半径为  $6 \text{ cm}$  的实心球体玩具制作一个圆台型带盖的纸质包装盒, 要使制成的包装盒能装下该球体玩具, 且该包装盒的下底面是半径为  $4 \text{ cm}$  的圆, 则制成的包装盒的容积最小为



- A.  $133\pi \text{ cm}^3$                       B.  $399\pi \text{ cm}^3$                       C.  $266\pi \text{ cm}^3$                       D.  $532\pi \text{ cm}^3$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_{m+n} = a_m a_n$ , 则下列结论正确的是
- A.  $a_{2024} = 1$   
 B.  $a_{2023} = 1$   
 C. 若  $S_{2024} = 2024$ , 则  $a_1 = 1$   
 D. 若  $S_{2023} = -1$ , 则  $a_1 = -1$
10. 已知函数  $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}$ , 则下列结论正确的是
- A.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称  
 B.  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{3\pi}{4}, 0)$  中心对称  
 C.  $f(x)$  的最小正周期是  $2\pi$   
 D.  $f(x)$  在  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  上有最大值, 且最大值为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$
11. 已知  $O$  为坐标原点,  $P, Q$  为抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  上两点,  $F$  为  $C$  的焦点, 若  $F$  到准线  $l$  的距离为 2, 则下列结论正确的是
- A. 若  $M(1, 3)$ , 则  $\triangle PMF$  周长的最小值为  $2 + \sqrt{5}$   
 B. 若直线  $PQ$  过点  $F$ , 则直线  $OP, OQ$  的斜率之积为  $-\frac{1}{4}$   
 C. 若  $N(0, -1)$ , 则  $\frac{|QN|}{|QF|}$  的取值范围是  $[1, \sqrt{2}]$   
 D. 若  $\triangle POF$  的外接圆与准线  $l$  相切, 则该外接圆的面积为  $\frac{9\pi}{4}$

【高三数学 第 2 页 (共 4 页)】

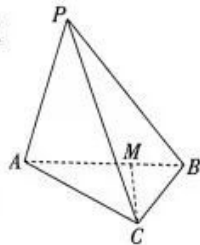
三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 甲、乙等 7 名同学随机站成一排,则甲、乙相邻且甲不站两端的不同排列方式有     ▲     种.

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右支上有一点  $A$ , 点  $A$  关于坐标原点对称的点为  $B$ ,  $F$

为双曲线  $C$  的左焦点, 且满足  $AF \perp BF$ , 当  $\angle BAF = \frac{\pi}{12}$  时, 双曲线  $C$  的离心率为     ▲    . 来源: 高三答案公众号

14. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABC$ ,  $PA=2$ ,  $PB=\sqrt{7}$ ,  $AB=3$ ,  $M$  为棱  $AB$  上靠近点  $B$  的三等分点, 且  $CM$  为  $\angle ACB$  的角平分线, 则二面角  $P-AC-B$  的平面角的正切值的最小值为     ▲    .



四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ , 已知  $b=1, c = \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $a = \sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

16. (15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 上顶点为  $A(0, \sqrt{3})$ , 且  $\triangle AF_1F_2$  为正三角形.

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

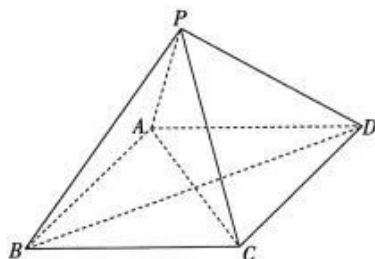
(2) 过点  $F_1$  且垂直于  $AF_2$  的直线与椭圆  $C$  交于  $D, E$  两点, 求  $\triangle ADE$  的面积.

17. (15分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,四边形  $ABCD$  是菱形,  $\angle ABC=60^\circ$ ,  $BD \perp PC$ ,  $AB=4$ ,  $AP=\sqrt{10}$ ,  $CP=3\sqrt{2}$ .

(1)证明:平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ .

(2)求二面角  $C-PD-B$  的余弦值.



18. (17分)

某学校食堂每天中午为师生提供了冰糖雪梨汤和苹果百合汤,其均有止咳润肺的功效.某同学每天中午都会在两种汤中选择一种,已知他第一天选择冰糖雪梨汤的概率为  $\frac{2}{3}$ ,若前一天选择冰糖雪梨汤,则后一天继续选择冰糖雪梨汤的概率为  $\frac{1}{3}$ ,而前一天选择苹果百合汤,后一天继续选择苹果百合汤的概率为  $\frac{1}{3}$ ,如此往复.

(1)求该同学第二天中午选择冰糖雪梨汤的概率.

(2)记该同学第  $n$  天中午选择冰糖雪梨汤的概率为  $P_n$ ,证明:  $\{P_n - \frac{3}{7}\}$  为等比数列.

(3)求从第 1 天到第 10 天中,该同学中午选择冰糖雪梨汤的概率大于苹果百合汤概率的天数.

19. (17分)

已知函数  $f(x)=2e^x+ax$ .

(1)讨论  $f(x)$  的单调性;

(2)若方程  $f(x)=m$  有两个不相等的根  $x_1, x_2$ , 且  $0 < x_1 < x_2$ ,  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ , 证明:  $f'(\sqrt{x_1 x_2}) < 0$ .


## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线