山东省实验中学2024届高三第三次诊断考试

数学答案

1.【答案】D

2. 【答案】D

3. 【答案】A

4. 【答案】C

5.【答案】B

6.【答案】A

7. 【答案】A

8. 【答案】C

9. 【答案】AD

10. 【答案】BCD

11. 【答案】BC

12.【答案】BC

13. 【答案】$(-1,9)\cup(9,+\infty)$

【解析】

【分析】根据向量夹角为锐角利用数量积求解.

【详解】因为$\overrightarrow{AB}=(4,y-1)$，$\vec{a}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$成锐角，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=4+2y-2=2y+2>0$，

解得$y>-1$，

当$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$同向时，$(4,y-1)=\lambda(1,2)(\lambda>0)$，即$\begin{cases}4=\lambda\\y-1=2\lambda\end{cases}$，解得$y=9$，

此时满足$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}>0$，但$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$所成角为0，不满足题意，

综上，$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$成锐角时，y的取值范围为$(-1,9)\cup(9,+\infty)$.

故答案为：$(-1,9)\cup(9,+\infty)$

14. 【答案】25

【解析】

【详解】设中截面的半径为r，则$r=\dfrac{R+5}{2}$①，

记中截面把圆台分为上、下两个圆台的侧面积分别为S_1、S_2，母线长均为l，

$S_1=\pi(5+r)l, S_2=\pi(R+r)l$，

又$\because S_1:S_2=1:2$，

$\therefore(5+r):(R+r)=1:2$②，

将①代入②整理得：$R=25$.

故答案为：25

15. 【答案】$(-\infty,2\mathrm{e}]$

【解析】

【详解】依题意，不等式$\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x\geq ax^2$在$(0,+\infty)$恒成立，

即$a\leq\dfrac{\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x}{x^2}$在$(0,+\infty)$恒成立，

设$f(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x}{x^2}(x>0)$，

$f'(x)=\dfrac{x^3+x-2}{x^3}\mathrm{e}^x=\dfrac{x^3-1+x-1}{x^3}\mathrm{e}^x=\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+2\right)}{x^3}\mathrm{e}^x$，

其中$\dfrac{x^2+x+2}{x^3}\mathrm{e}^x>0$，所以$f(x)$在区间$(0,1)$上，$f'(x)<0, f(x)$单调递减；

在区间$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0, f(x)$单调递增，

所以$f(x)\geq f(1)=2\mathrm{e}$，所以$a\leq 2\mathrm{e}$，

所以a的取值范围是$(-\infty,2\mathrm{e}]$.

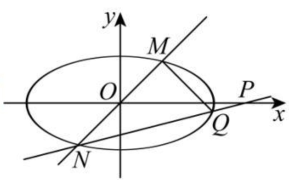
故答案为：$(-\infty,2\mathrm{e}]$

16. 已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过$C$中心的直线交$C$于$M$，$N$两点，点$P$在$x$轴上其横坐标是点$M$横坐标的3倍，直线$NP$交$C$于点$Q$，若直线$QM$恰好是以$MN$为直径的圆的切线，则$C$的离心率为________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【详解】



设$M\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，则$N\left(-x_1,-y_1\right)$，$P(3x_1,0)$，

设k_1、k_2、k_3，分别为直线MN、QM、NP的斜率，

则$k_1=\dfrac{y_1}{x_1}$，$k_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$k_3=\dfrac{0+y_1}{3x_1-\left(-x_1\right)}=\dfrac{y_1}{4x_1}=\dfrac{1}{4}k_1$，

因直线QM是以MN为直径的圆的切线

所以$QM\perp MN$，$k_1k_2=-1$，

所以$k_2k_3=-\dfrac{1}{4}$，

又Q在直线NP上，所以$k_3=\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$，

因M、Q在$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$上，

所以$\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式相减得$\dfrac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

整理得$\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\cdot\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，

故$k_2k_3=-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{1}{4}$，即$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，

$e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

故$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

17. 【答案】（1）$C=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由$(\sin C+\sin B)(c-b)=a(\sin A-\sin B)$，利用正弦定理转化为$a^2+b^2-c^2=ab$，再利用余弦定理求解；

（2）方法一 根据CD平分$\angle ACB$，且$AD=2DB$，利用角平分线定理得到$b=2a$，$AD=\frac{2}{3}c$，$BD=\frac{1}{3}c$，再由$\cos C=\frac{1}{2}$，$\cos\angle ACD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求得边长，再利用三角形面积公式求解. 方法二根据 CD平分$\angle ACB$，且$AD=2DB$，得到$b=2a$，然后由$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，求得边$a$，再利用三角形面积公式求解.

【小问1详解】

解：由$(\sin C+\sin B)(c-b)=a(\sin A-\sin B)$及正弦定理，

得$(c+b)(c-b)=a(a-b)$，即$a^2+b^2-c^2=ab$，

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$.

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.

【小问2详解】

方法一 因为CD平分$\angle ACB$，且$AD=2DB$，

所以由角平分线定理，得$\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB}=2$，

则有$b=2a$，$AD=\frac{2}{3}c$，$BD=\frac{1}{3}c$.

由$\cos C=\frac{1}{2}=\frac{a^2+4a^2-c^2}{4a^2}$，得$c=\sqrt{3}a$.

又$\cos\angle ACD=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4a^2+4-\frac{4}{9}c^2}{8a}$，

将$c=\sqrt{3}a$代入，可得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$a=\sqrt{3}$.

当$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$c=\frac{3}{2}$，则$DB+CB=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}<2$，故舍去，所以$a=\sqrt{3}$.

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

方法二 因为CD平分$\angle ACB$，且$AD=2DB$，所以$\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DB}=2$，则有$b=2a$.

因为$S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，

所以$\frac{1}{2}\times2\times b\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times2\times a\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}$，

则有$\frac{3}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，所以$a=\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

18.【答案】(1)证明见解析；(2)$\frac{PA}{SA}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

【解析】

【分析】(1)通过证明$SA\perp BP$和$SA\perp CP$即可得证；

(2)取BC的中点O，连接SO，AO，以点O为坐标原点，OB，AO，OS所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，利用向量法建立关系可求解.

【详解】(1)证明：因为$\triangle ABC$为等边三角形，所以$AB=AC=BC$.

因为$\triangle SBC$为等边三角形，所以$SB=SC=BC$，所以$AB=SB$，$AC=SC$.

在等腰$\triangle BAS$和等腰$\triangle CAS$中，因为P为SA的中点，所以$SA\perp BP$，$SA\perp CP$.

又因为$BP\cap CP=P$，BP，$CP\subset$平面PBC，所以$SA\perp$平面PBC.

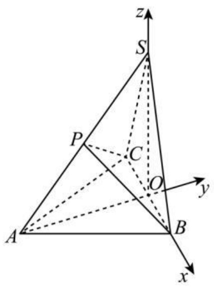
(2)如图，取BC的中点O，连接SO，AO，则在等边$\triangle ABC$和等边$\triangle SBC$中，有$BC\perp AO$，$BC\perp SO$，

所以$\angle AOS$为二面角$S-BC-A$的平面角.

因为平面$SBC\perp$平面ABC，所以$\angle AOS=90°$，即$AO\perp SO$.

所以OA，OB，OS两两垂直.

以点O为坐标原点，OB，AO，OS所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设$AB=a$，

则$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$，$B\left(\frac{1}{2}a,0,0\right)$，$C\left(-\frac{1}{2}a,0,0\right)$，$S\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

因为P在SA上，设$AP=\lambda AS\ (0<\lambda<1)$，$P(0,y,z)$，

则$\overrightarrow{AP}=\left(0,y+\frac{\sqrt{3}}{2}a,z\right)$，$\overrightarrow{AS}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，

解得$y=\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda-1)a$，$z=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a$，

即$P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda-1)a,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a\right)$.

显然平面ABC的一个法向量$\vec{n}=(0,0,1)$.

设平面PBC的一个法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

因为$\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda-1)a,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a\right)$，$\overrightarrow{CB}=(a,0,0)$.

所以$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=0\\(\lambda-1)y_1+\lambda z_1=0\end{cases}$，

令$y_1=\lambda$，则$z_1=1-\lambda$，所以$\vec{m}=(0,\lambda,1-\lambda)$.

因为二面角$P-BC-A$的大小为60°，

所以$\left|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}\right|=\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2}}=\cos60^\circ$，

所以$2\lambda^2-6\lambda+3=0$.又$0<\lambda<1$，解得$\lambda=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，即$\frac{PA}{SA}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题考查线面垂直的证明，考查向量法求空间中线段比例，属于中档题.

19.【答案】(1) $a_n=n\cdot2^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

(2) $T_n=\frac{3}{2}\left[(n-1)\cdot2^n+1\right]$

【解析】

【分析】(1) 方法1：根据递推关系式，先变形；再采用累积法求数列通项公式；方法2：根据递推关系式，先构造出等比数列，再求数列通项公式.

(2) 先求出数列$\{c_n\}$的通项公式，再根据通项公式的特点利用错位相减法求前n项和.

【小问1详解】

方法1：

$\because a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n\cdot\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)}{n}$，

$\therefore$当$n\geq2$时，$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}=n\cdot2^{n-1}$

$\therefore a_n=n\cdot2^{n-1},n\geq2$

又$\because n=1$也适合上式，$\therefore a_n=n\cdot2^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$；

方法 2：$\because a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n}a_n\cdot(n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{2a_n}{n}$，

又 $\dfrac{a_1}{1}=1$，故 $\dfrac{a_n}{n}\neq 0$，

$\therefore \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 为公比为 2，首项为 1 的等比数列.

$\therefore \dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$，$\therefore a_n=n\cdot 2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【小问 2 详解】

$\because a_n=n\cdot 2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$，$\therefore b_n=2^{n-1}$.

由题知，$c_k=\dfrac{(b_k+b_{k+1})k}{2}=\dfrac{(2^{k-1}+2^k)k}{2}=\dfrac{3}{2}k\cdot 2^{k-1}$

设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则 $T_n=\dfrac{3}{2}\times1\times2^0+\dfrac{3}{2}\times2\times2^1+\dfrac{3}{2}\times3\times2^2+\cdots+\dfrac{3}{2}(n-1)\cdot2^{n-2}+\dfrac{3}{2}n\cdot2^{n-1}$

$2T_n=\dfrac{3}{2}\times1\times2^1+\dfrac{3}{2}\times2\times2^2+\dfrac{3}{2}\times3\times2^3+\cdots+\dfrac{3}{2}(n-1)\cdot2^{n-1}+\dfrac{3}{2}n\cdot2^n$

所以 $-T_n=\dfrac{3}{2}\times1\times2^0+\dfrac{3}{2}\times2^1+\dfrac{3}{2}\times2^2+\cdots+\dfrac{3}{2}\times2^{n-2}+\dfrac{3}{2}\times2^{n-1}-\dfrac{3}{2}n\cdot2^n$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2^0(1-2^n)}{1-2}-\dfrac{3}{2}n\cdot2^n=-\dfrac{3}{2}\left[1+(n-1)\cdot2^n\right]$，

故 $T_n=\dfrac{3}{2}\left[(n-1)\cdot2^n+1\right]$.

20. 【答案】(1) 0.6　　(2) 分布列见解析，1.9

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由频率估计概率，按古典概型进行求解；

(2) 先确定随机变量的可能取值，再求出各值所对应的概率，列出分布列，根据期望的定义求期望；

(3) 用条件概率公式进行推理证明.

【详解】(1) 设事件 C 为"一天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐"，

因为 30 天中王同学午餐和晚餐选择不同餐厅就餐的天数为 $6+12=18$，

所以 $P(C)=\dfrac{18}{30}=0.6$.

(2) 记 X 为王同学、张老师在一天中就餐餐厅的个数，

则 X 的所有可能取值为 1 和 2，

所以 $P(X=1)=0.3\times0.2+0.1\times0.4=0.1$，

$P(X=2)=1-P(X=1)=0.9$，

所以X的分布列为

X	1	2
P	0.1	0.9

所以X的数学期望$E(X)=1\times 0.1+2\times 0.9=1.9$.

（3）由题知$P(N|M)>P(N|\bar{M})$，所以$\dfrac{P(NM)}{P(M)}>\dfrac{P(N\bar{M})}{P(\bar{M})}=\dfrac{P(N)-P(NM)}{1-P(M)}$

所以$P(NM)>P(N)\cdot P(M)$，

所以$P(NM)-P(N)P(NM)>P(N)\cdot P(M)-P(N)P(NM)$，

即$P(NM)\cdot P(\bar{N})>P(N)\cdot P(\bar{N}M)$，

所以$\dfrac{P(NM)}{P(N)}>\dfrac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$，即$P(M|N)>P(M|\bar{N})$

21. 【答案】（1）增区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）求得函数$y=\varphi(x)$的定义域和导数，分析导数的符号变化，即可得出函数$y=\varphi(x)$的单调递增区间和递减区间；

（2）求得直线l的方程为$y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$，设直线$l$与函数$y=g(x)$相切于点$(t,g(t))$，可得出$t=-\ln x_0$，进而可将直线$l$的方程表示为$y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{1+\ln x_0}{x_0}$，可得$\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，然后利用（1）中的函数$\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$在区间$(1,+\infty)$上的单调性结合零点存在定理可证得结论成立.

【详解】（1）$\varphi(x)=f(x)-\dfrac{x+1}{x-1}=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$，定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}>0$，

所以，函数$y=\varphi(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，$(1,+\infty)$；

（2）$\because f(x)=\ln x$，$\therefore f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$，

所以，直线l的方程为$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，即$y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$，

$\because g\left(x\right)=e^{x}$，则 $g'\left(x\right)=e^{x}$，设直线 l 与函数 $y=g\left(x\right)$ 相切于点 $\left(t,g\left(t\right)\right)$，

则 $g'\left(t\right)=e^{t}=\dfrac{1}{x_0}$，得 $t=-\ln x_0$，则切点坐标为 $\left(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$，

所以，直线 l 的方程可表示为 $y-\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\left(x+\ln x_0\right)$，即 $y=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{1+\ln x_0}{x_0}$，

由题意可得 $\ln x_0-1=\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}$，则 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，

下面证明：存在唯一的 $x_0\in\left(1,+\infty\right)$ 使得 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$.

由（1）知，函数 $\varphi\left(x\right)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$ 在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\because\varphi\left(2\right)=\ln 2-3<0$，$\varphi\left(e^{2}\right)=2-\dfrac{e^{2}+1}{e^{2}-1}=\dfrac{e^{2}-3}{e^{2}-1}>0$，

由零点存在定理可知，存在唯一的 $x_0\in\left(2,e^{2}\right)$，使得 $\varphi\left(x_0\right)=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$.

所以，存在唯一的 $x_0\in\left(1,+\infty\right)$ 使得 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$.

因此，在区间 $\left(1,+\infty\right)$ 上存在唯一的 x_0，使得直线 l 与与曲线 $y=g\left(x\right)$ 相切.

【点睛】本题考查利用导数求解函数的单调区间，同时也考查了利用导数证明直线与曲线相切，考查了零点存在定理的应用，考查推理能力与计算能力，属于难题.

22. 【答案】（1）$x^2=4y$

（2）（i）证明见解析（ii）1

【解析】

【小问 1 详解】

设圆心 $D(x,y)$，由题意得：$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=|y+1|$，化简整理得：$x^2=4y$，

所以曲线 C 的方程为：$x^2=4y$.

【小问 2 详解】

（i）设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，因为 $y=\dfrac{x^2}{4}$，所以 $y'=\dfrac{x}{2}$，

$\therefore$ 直线 PA 的方程为：$y=\dfrac{x_1}{2}\left(x-x_1\right)+y_1$，即 $y=\dfrac{1}{2}x_1x-\dfrac{1}{4}x_1^2$，令 $y=0$，得到 $x=\dfrac{x_1}{2}$，

同理可得直线 PB 的方程为：$y=\dfrac{1}{2}x_2x-\dfrac{1}{4}x_2^2$，令 $y=0$，得到 $x=\dfrac{x_2}{2}$，

$\therefore M\left(\frac{x_1}{2},0\right)$，$N\left(\frac{x_2}{2},0\right)$，联立$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2 \\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2 \end{cases}$，消 y 解得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$，

所以 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},-1\right)$，

又 $F(0,1)$，$\therefore \overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}=\left(\frac{x_1}{2},-1\right)+\left(\frac{x_2}{2},-1\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)=\overrightarrow{FP}$，

所以四边形 $FNPM$ 为平行四边形；

（ii）由（i）知直线 PA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$，又 $x_1^2=4y_1$，所以 $\frac{1}{2}x_1x-y-y_1=0$，即 $x_1x-2y-2y_1=0$，

同理可知直线 PB 的方程为 $x_2x-2y-2y_2=0$，又因为 P 在直线 PA，PB 上，设 $P(x_0,-1)$，则有$\begin{cases} x_1x_0-2y_1+2=0 \\ x_2x_0-2y_2+2=0 \end{cases}$，

所以直线 AB 的方程为：$x_0x-2y+2=0$，故直线 AB 过点 $F(0,1)$，

$\because$ 四边形 $FNPM$ 为平行四边形，$\therefore FM//BP$，$FN//AP$，

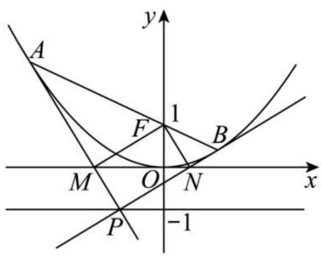
$\therefore \angle AMF=\angle MPN=\angle BNF$，$FN=PM$，$PN=MF$，$\frac{BN}{NP}=\frac{BF}{FA}=\frac{MP}{MA}$，

$\therefore MP\cdot NP=MA\cdot BN$，

$\because S_1=\frac{1}{2}|MA||MF|\sin\angle AMF$，$S_2=\frac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN$，$S_3=\frac{1}{2}|NB||NF|\sin\angle BNF$，

$\therefore$

$$\frac{S_2^2}{S_1S_3}=\frac{\left(\frac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN\right)^2}{\left(\frac{1}{2}|MA||MF|\sin\angle AMF\right)\cdot\left(\frac{1}{2}|NB||NF|\sin\angle BNF\right)}=\frac{(|PM|\cdot|PN|)^2}{|MA|\cdot|MF|\cdot|NB|\cdot|NF|}=\frac{|PM|\cdot|PN|}{|MA|\cdot|NB|}=1.$$



【点睛】关键点点睛：（2）中的第（i）问，关键在于利用向量来证明，从而将问题转化成求出点的坐标，将几何问题代数化；第（ii）问的关键在于求出直线 AB 恒过定点，再利用几何关系，求出相似比.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线