

吉林省普通高中 G6 教考联盟 2023-2024 学年上学期期末考试

高二年级数学

本试卷共 5 页. 考试结束后, 将答题卡交回.

注意事项: 1. 答卷前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区.

2. 答题时请按要求用笔.

3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效: 在草稿纸、试卷上答题无效.

4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.

5. 保持卡面清洁, 不要折叠, 不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 数列 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ 的一个通项公式为 $a_n = (\quad)$

- A. $\frac{(-1)^n}{n}$ B. $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ C. $\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ D. $\frac{(-1)^n}{n+1}$

2. 直线 l 的一个方向向量为 $(-2, 1, -1)$, 平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (3, 3, -3)$, 则 (\quad)

- A. $l // \alpha$ B. $l \perp \alpha$
C. $l // \alpha$ 或 $l \subset \alpha$ D. l 与 α 的位置关系不能判断

3. 已知圆 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ 过点 $P(1, 3)$ 作圆的切线, 则该切线的一般式方程为 (\quad)

- A. $x + 2y - 7 = 0$ B. $x - 2y + 5 = 0$
C. $2x + y - 5 = 0$ D. $2x - y + 1 = 0$

4. 如图是某景区内的一座抛物线拱形大桥, 该桥抛物线拱形部分的桥面跨度为 10 米, 拱形最高点与水面的距离为 6 米, 为增加景区的夜晚景色, 景区计划在拱形桥的焦点处悬挂一闪光灯, 则竖直悬挂的闪光灯到水面的距离为 (\quad) (结果精确到 0.01)



- A. 4.96 B. 5.06 C. 4.26 D. 3.68

5. 函数 $f(x) = \ln x + 2x^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线方程为 ()

- A. $y = 3x - 1$ B. $y = 5x - 3$

- C. $y = -3x + 5$ D. $y = -5x + 7$

6. 设直线 l 的方程为 $x + y \cos \theta + 3 = 0 (\theta \in \mathbf{R})$, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()

- A. $[0, \pi)$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

7. 已知公差 $d \neq 0$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 满足 $S_{2000} = S_{2024}$, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $S_{2012} = 0$ B. $S_{4024} = 0$
 C. S_{2012} 是 S_n 中的最大值 D. S_{2012} 是 S_n 中的最小值

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, M 和 N 分别为实轴的右端点和虚轴的上端点, 过右焦点 F 的直线 l 交 C 的右支于 A, B 两点, 若存在直线 l 使得点 M 为 $\triangle NAB$ 的重心, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 且 a_2, a_4, a_3 成等差数列, 则 $q =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

10. 已知圆 $C: (x+2)^2 + y^2 = 4$, 直线 $l: (m+1)x + 2y - 1 + m = 0 (m \in \mathbf{R})$, 则 ()

- A. 直线 l 恒过定点 $(-1, 1)$
 B. 当 $m = 0$ 时, 圆 C 上恰有三个点到直线 l 的距离等于 1

C. 直线 l 与圆 C 有两个交点

D. 圆 C 与圆 $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ 恰有三条公切线

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 - 2a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = a_n a_{n+1}$. 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项

和为 S_n , 则下列结论正确的是 ()

A. $a_3 = -3$

B. 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列

C. $S_n < -\frac{1}{2}$

D. $S_n \geq -\frac{1}{2}$

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(x_0, y_0)$ 是椭圆 C 上异于左、右顶点的一点, 则下列说法正确的是 ()

A. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$

B. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 2

C. 若 $A(1, 0)$, 则 $|PA|$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 1$

D. $\frac{y_0}{x_0 + 4}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{11}}{11}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若直线 $x + y + 1 = 0$ 是圆 $(x - a)^2 + y^2 = 1$ 的一条对称轴, 则 $a =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 则 $f(x)$ 的导数 $f'(x) =$ _____.

15. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $A(2, 1)$, M 为抛物线上一点, 且 M 不在直线 AF 上, 则 $\triangle MAF$ 周长的最小值为 _____.

16. 定义: 各项均不为零的数列 $\{a_n\}$ 中, 所有满足 $a_i \cdot a_{i+1} < 0$ 的正整数 i 的个数称为这个数列 $\{a_n\}$ 的变号

数. 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 6n + a$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 5$), 令 $a_n = 1 - \frac{4}{b_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若数列 $\{a_n\}$ 的

变号数为 2, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知动点 P 与两个定点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$ 的距离的比是 2.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程;

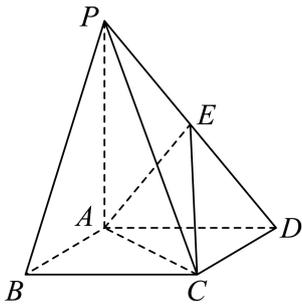
(2) 直线 l 过点 $(2, 1)$, 且被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n = 2a_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} \log_2 a_n, n \text{ 为奇数} \\ a_n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，侧棱 $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 E 是 PD 的中点， $AB = 1$ ， $AD = PA = 2$.



(1) 求 PC 与 AE 所成角的大小；

(2) 求 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值.

20. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线为 $y = x$ ，且双曲线 C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 记 O 为坐标原点，过点 $Q(0, 2)$ 的直线 l 与双曲线 C 相交于不同的两点 M 、 N ，若 $\triangle OMN$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ ，求直线 l 的方程.

21. 我国某西部地区要进行沙漠治理，已知某年（第 1 年）年底该地区有土地 1 万平方千米，其中 70% 是沙漠。从第 2 年起，该地区进行绿化改造，每年把原有沙漠的 16% 改造成绿洲，同时原有绿洲的 4% 被沙漠所侵蚀又变成沙漠。设第 n 年绿洲面积为 a_n 万平方千米.

(1) 求第 n 年绿洲面积 a_n （单位：万平方千米）与上一年绿洲面积 a_{n-1} （单位：万平方千米）之间的数量关系（ $n \geq 2$ ）；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 至少经过 $n (n \in \mathbb{N}^*)$ 年，绿洲面积可超过 60%，求 n 的值。（参考数据： $\lg 2 \approx 0.301$ ）

22. 已知 $B(-2, 0)$ ， $C(2, 0)$ 为 $\triangle ABC$ 的两个顶点， P 为 $\triangle ABC$ 的重心，边 AC ， AB 上的两条中线长度之和为 $3\sqrt{6}$.

(1) 求点 P 的轨迹 Γ 的方程;

(2) 过 C 作不平行于坐标轴的直线交 Γ 于 D, E 两点, 若 $DM \perp x$ 轴于点 M , $EN \perp x$ 轴于点 N , 直线 DN 与 EM 交于点 Q . 求证: 点 Q 在一条定直线上, 并求此定直线方程.



