2024 届高三年级 2 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页，19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2\leqslant 5\}$，$B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$，则 $A\cup B$ 中元素的个数为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=1$，$\cos A=\frac{5}{6}$，则 $BC=$

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

3. 若 $(a-2b)^{20}=x_0a^{20}+x_1a^{19}b+x_2a^{18}b^2+\cdots+x_{19}ab^{19}+x_{20}b^{20}$，则 $x_{19}=$

A. -20　　B. -20×2^{19}　　C. -2^{19}　　D. 20×2^{19}

4. 若 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha=$

A. $-\frac{2\pi}{3}$　　B. $-\frac{3\pi}{4}$　　C. $-\frac{5\pi}{4}$　　D. $-\frac{4\pi}{3}$

5. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2)=-f(-x^2)$，则下列结论一定正确的为

A. $f(x)$ 的图象关于原点对称　　B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称　　D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

6. 已知点 P 是曲线 Γ：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 在第一象限内的一点，A 为 Γ 的左顶点，R 为 PA 的中点，F 为 Γ 的右焦点. 若直线 OR（O 为原点）的斜率为 $\sqrt{5}$，则 $\triangle PAF$ 的面积为

A. $\sqrt{10}+\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}-\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{2}+3$　　D. $3\sqrt{2}-3$

7. 在某电路上有 C、D 两个独立工作的元件，每次通电后，需要更换 C 元件的概率为 0.2，需要更换 D 元件的概率为 0.1，则在某次通电后 C、D 有且只有一个需要更换的条件下，C 需要更换的概率是

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{50}$　　C. $\frac{9}{13}$　　D. $\frac{3}{4}$

8. 在各棱长都为 2 的正四棱锥 $V-ABCD$ 中，侧棱 VA 在平面 VBC 上的射影长度为

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 若 z 满足 $z-\bar{z}=6$，$|z|=|z-2i|$，则

A. z 的实部为 3

B. z 的虚部为 1

C. $\frac{z}{3-i}=\frac{1-3i}{2}$

D. z 对应的向量与实轴正方向夹角的正切值为 3

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(x,2)$，则

A. 若 $x=0$，则存在唯一的实数 p,q，使得 $\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$

B. 若 $x=1$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$

C. 若 $x=4$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

D. 若 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

11. 若过点 (a,b) 可作曲线 $f(x)=x^2\ln x$ 的 n 条切线（$n\in\mathbf{N}$），则

A. 若 $a\leqslant 0$，则 $n\leqslant 2$

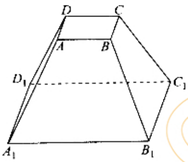
B. 若 $0<a<e^{-\frac{3}{2}}$，且 $b=a^2\ln a$，则 $n=2$

C. 若 $n=3$，则 $a^2\ln a<b<2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-3}$

D. 过 $(e^{-\frac{1}{2}},-6)$，仅可作 $y=f(x)$ 的一条切线

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 如图是一个正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，已知正四棱台的上、下底面的边长分别为 2 和 6，体积为 $\frac{104\sqrt{2}}{3}$，则侧面积为________.



13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，且 $a_{n+1}=3a_n+4n-6$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

14. 若圆 C 与抛物线 $\Gamma: y=\frac{x^2}{6}$ 在公共点 B 处有相同的切线，且 C 与 y 轴切于 Γ 的焦点 A，则 $\sin\frac{\angle ACB}{2}=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

某小区在 2024 年的元旦举办了联欢会，现场来了 1 000 位居民. 联欢会临近结束时，物业公司从现场随机抽取了 20 位幸运居民进入摸奖环节，这 20 位幸运居民的年龄用随机变量 X 表示，且 $X \sim N(45,225)$.

（1）请你估计现场年龄不低于 60 岁的人数（四舍五入取整数）；

（2）奖品分为一等奖和二等奖，已知每个人摸到一等奖的概率为 40%，摸到二等奖的概率为 60%，每个人摸奖相互独立，设恰好有 $n(0\leqslant n\leqslant 20)$ 个人摸到一等奖的概率为 $P(n)$，求当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值.

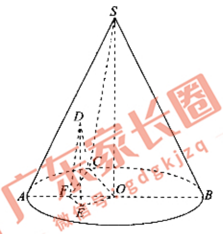
附：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.682\ 7$，$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.954\ 5$.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在圆锥 SO 中，若轴截面 SAB 是正三角形，C 为底面圆周上一点，F 为线段 OA 上一点，D（不与 S 重合）为母线上一点，过 D 作 DE 垂直底面于 E，连接 OE，EF，DF，CF，CD，且 $\angle COF=\angle EFO$.

（1）求证：平面 SCO // 平面 DEF；

（2）若 $\triangle EFO$ 为正三角形，且 F 为 AO 的中点，求平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值.



17.(本小题满分 15 分)

设函数 $f(x)=\ln x+a(x-1)(x-2)$,其中 a 为实数.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)当 $f(x)$在定义域内有两个不同的极值点 x_1,x_2 时,证明:$f(x_1)+f(x_2)>\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$.

18.(本小题满分 17 分)

在直角坐标系 xOy 中,已知 $C_1(-1,0)$,$C_2(1,0)$,$P(x,y)$,$4\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_2P}=3x^2$.

(1)求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2)设直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴,l 与 C 交于 A、B 两点,点 $M(x_0,y_0)$ $(x_0,y_0\neq 0)$为弦 AB 的中点.过点 M 作 l 的垂线交 C 于 D、E,N 为弦 DE 的中点.

①证明:l 与 ON 相交;

②已知 l 与直线 ON 交于 T,若$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{NT}(\lambda>0)$,求 λ 的最大值.

19.(本小题满分 17 分)

在无穷数列$\{a_n\}$中,令 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$,若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$T_n\in\{a_n\}$,则称$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的.

(1)试判断:任意一个无穷等差数列$\{a_n\}$对前 n 项之积是否是封闭的?

(2)设$\{a_n\}$是无穷等比数列,其首项 $a_1=2$,公比为 q.若$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的,求出 q 的两个值(若多求,则按前 2 个计分);

(3)证明:对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$,总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$,使得 $a_n=b_n\cdot c_n(n\in\mathbf{N}^*)$,其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前 n 项之积都是封闭的.