高三数学参考答案

1. C　因为 $A=\{x|x>4$ 或 $x<2\}$，$B=\{x|x<3\}$，所以 $A\cap B=\{x|x<2\}$.

2. D　因为 $z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$，所以 $\bar{z}=1-i$，故 $z-\bar{z}=2i$.

3. B　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $3(2m+1)=5(m-1)$，所以 $m=-8$.

4. A　因为 $a=\log_{0.3}2<\log_{0.3}1=0$，$b=3^{0.2}>3^0=1$，$c=0.2^{0.3}\in(0,1)$，所以 $b>c>a$.

5. B　因为△OFM 的外接圆与抛物线 C 的准线相切，所以△OFM 的外接圆的圆心到准线的距离等于圆的半径. 因为圆的面积为 36π，所以圆的半径为 6，又因为圆心在 OF 的垂直平分线上，$|OF|=\frac{p}{2}$，所以 $\frac{p}{2}+\frac{p}{4}=6$，$p=8$.

6. D　$f(x)=2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\sqrt{2}\cos 2x$，$g(x)=\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{3\pi}{4})$，故将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度可得到 $g(x)$ 的图象.

7. C　在三棱锥 C-ABD 中，底面 ABD 是以 AB 为斜边的直角三角形.
设底面 ABD 外接圆的圆心为 O'，则其半径 $r=4$，设三棱锥 C-ABD 外接球的球心为 O，半径为 R，因为二面角 A-BD-C 为 $\frac{\pi}{3}$，所以点 C 到底面的距离为 $2\sqrt{3}$，且点 C 在底面的射影为 AD 的中点 E，所以 $O'E=2\sqrt{3}$. 设球心 O 到底面 ABD 的距离为 d，则 $r^2+d^2=R^2$，且 $O'E^2+(2\sqrt{3}-d)^2=R^2$，解得 $R^2=\frac{52}{3}$，所以 $S=4\pi R^2=\frac{208}{3}\pi$.

8. A　因为 $a_na_{n+1}=n$，$a_1=1$，所以 $a_2=1$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}a_n=n-1$，所以 $a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n=1$，所以 $\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，所以 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=a_3-a_1+a_4-a_2+a_5-a_3+\cdots+a_{n+1}-a_{n-1}=-a_1-a_2+a_n+a_{n+1}=a_n+a_{n+1}-2$. 因为 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant a_n+a_{n+1}-2^{\lambda}$，
所以 $a_n+a_{n+1}-2\leqslant a_n+a_{n+1}-2^{\lambda}$，所以 $2^{\lambda}\leqslant 2$，故 $\lambda\leqslant 1$.

9. BD　因为早睡群体的睡眠指数不一定比晚睡群体的睡眠指数高，所以 A 错误；因为早睡群体的睡眠指数的 10 个样本数据中 85 出现次数最多，所以 B 正确；因为晚睡群体的睡眠指数的第 60 百分位数为 $\frac{66+68}{2}=67$，所以 C 错误；由样本数据可知，早睡群体的睡眠指数相对比较稳定，所以方差小，故 D 正确.

10. AD　因为 $a^2-ab=a(a-b)>0$，所以 $a^2>ab$，
因为 $ab-b^2=b(a-b)>0$，所以 $ab>b^2$，所以 $a^2>ab>b^2$，故 A 正确；
因为 $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\geqslant 2$ 的等号成立条件 $x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$ 不成立，所以 B 错误；
因为 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2=1$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2$，故 C 错误；

因为$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}(x+2-x)(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x})=\frac{1}{2}(2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x})\geqslant\frac{1}{2}(2+2)=2$，

当且仅当$\frac{1}{x}=\frac{1}{2-x}$，即$x=1$时，等号成立，所以D正确.

11. BCD　对于A，因为$A(0,5)$，$B(-5,0)$，所以直线AB的方程为$x-y+5=0$，圆心$C(-3,4)$到直线AB的距离为$\frac{|-3-4+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$，又因为圆$C$的半径$r=2\sqrt{2}$，所以直线$AB$截圆$C$所得的弦长为$2\times\sqrt{8-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$，A错误.

对于B，易知$|AB|=5\sqrt{2}$，要想$\triangle PAB$的面积最大，只需点P到直线AB的距离最大，而点P到直线AB的距离的最大值为$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，所以$\triangle PAB$的面积的最大值为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=15$，B正确.

对于C，当点P在直线AB上方时，点P到直线AB的距离的范围是$(0,r+\sqrt{2})$，即$(0,3\sqrt{2})$，由对称性可知，此时满足到直线AB的距离为$\sqrt{2}$的P点位置有2个. 当点P在直线AB下方时，点P到直线AB的距离的范围是$(0,r-\sqrt{2}]$，即$(0,\sqrt{2}]$，此时满足到直线AB的距离为$\sqrt{2}$的P点位置只有1个. 故满足到直线AB的距离为$\sqrt{2}$的P点位置共有3个，C正确.

对于D，由题意知$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
又因为$A(0,5)$，$B(-5,0)$，$C(-3,4)$，所以$\overrightarrow{CA}=(3,1)$，$\overrightarrow{CB}=(-2,-4)$，故$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=3\times(-2)+1\times(-4)=-10$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(1,-3)$. 设点$D(x_0,y_0)$满足$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$，则$\overrightarrow{CD}=(x_0+3,y_0-4)$，故$\begin{cases}x_0+3=1,\\y_0-4=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=-2,\\y_0=1,\end{cases}$即$D(-2,1)$，$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{10}$，所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=8+|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle-10=-2+2\sqrt{2}\times\sqrt{10}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle=-2+4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle$. 又因为$4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle\in[-4\sqrt{5},4\sqrt{5}]$，所以$-2+4\sqrt{5}\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CD}\rangle\in[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}]$，即$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围为$[-2-4\sqrt{5},-2+4\sqrt{5}]$，D正确.

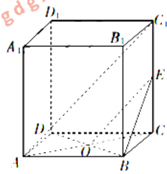
12. ACD　因为$f(x+2)+f(x)=f(2026)$，所以$f(x+4)+f(x+2)=f(2026)$，两式相减得$f(x+4)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4. 因为$f(x+1)-1$是奇函数，所以$f(-x+1)-1=-f(x+1)+1$，所以$f(-x+1)+f(x+1)=2$，即$f(-x)+f(x+2)=2$，所以$f(1)=1$.
因为$f(x+2)+f(x)=f(2026)=f(2)$，所以$f(4)=0$，即$f(0)=0$. 因为$f(-x)+f(x+2)=2$，所以$f(0)+f(2)=2$，所以$f(2)=2$，所以$f(x+2)+f(x)=2$，所以$f(3)+f(1)=2$，故A正确.
因为$f(-x)+f(x+2)=2$，所以$f(-1)+f(3)=2$，即$f(3)+f(3)=2$，所以$f(3)=1$. 因为$f(2023)+f(2025)=f(3)+f(1)=2$，$f(2024)=f(0)=0$，所以B错误.
因为$f(2022)+f(2024)=f(2)+f(0)=2$，$f(2023)=f(3)=1$，所以C正确.

因为$\sum\limits_{i=1}^{2024} f(i)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=506\times4=2024$，所以D正确.

13. -2　$f'(x)=x-2-ae^x$，由$f'(0)=-2-a=0$，得$a=-2$.

14. 60　由题意可知凉菜选择方案共有$C_4^2=6$种，饮品选择方案共有$C_4^2+C_4^1=10$种，因此该套餐的供餐方案共有$6\times10=60$种.

15. $2\sqrt{3}$　连接AC，交DB于点O，取CC_1的中点E，连接OE，BE. 因为$AC_1 // OE$，所以BD与AC_1所成的角为$\angle BOE$(或其补角). 令$EC=x$，在$\triangle BEO$中，由$AB=8$，$AD=6$，得$OB=5$. 又$OE=\sqrt{x^2+25}$，$BE=\sqrt{x^2+36}$，$\cos\angle BOE=\frac{\sqrt{7}}{10}$，由余弦定理得$\frac{OE^2+OB^2-BE^2}{2OE\cdot OB}=\frac{\sqrt{7}}{10}$，解得$x=\sqrt{3}$，所以$CC_1=2\sqrt{3}$.



16. $\frac{1}{2}$　由题意可知点(a,b)一定在其蒙日圆上，所以$a^2+b^2=\frac{7}{3}b^2$，所以$(\frac{b}{a})^2=\frac{3}{4}$，故椭圆$C$的离心率为$\sqrt{1-(\frac{b}{a})^2}=\frac{1}{2}$.

17. 解：(1)因为$2S_n+a_n-1=0$，

所以当$n=1$时，$a_1=\frac{1}{3}$，…… 1分

当$n\geq2$时，$2S_{n-1}+a_{n-1}-1=0$，两式相减得$3a_n=a_{n-1}$，…… 2分

所以数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{3}$为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，…… 4分

则$a_n=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=(\frac{1}{3})^n$. …… 5分

(2)因为$b_n=\log_{27}a_n=-\frac{n}{3}$，…… 6分

所以$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{9}{n(n+1)}=9(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，…… 8分

所以$T_n=9(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=9(1-\frac{1}{n+1})=\frac{9n}{n+1}$. …… 10分

18. 解：(1)因为$P(M<248)=0.1$，所以$P(M\geq248)=1-0.1=0.9$，…… 1分

则这3包中恰有2包质量不小于248 g的概率为$C_3^2\times0.9^2\times0.1=0.243$. …… 5分

(2)因为$P(M<248)=0.1$，所以$P(248<M<252)=(0.5-0.1)\times2=0.8$. …… 7分

依题意可得$X\sim B(K,0.8)$，…… 8分

所以$D(X)=K\times0.8\times(1-0.8)=0.16K$，…… 10分

因为$D(X)>320$，所以$K>2000$，…… 11分

又K为正整数，所以K的最小值为2001. …… 12分

19. 解：(1)因为$a\sin B=b\sin(A+\frac{\pi}{3})$，所以$\sin B(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A)-\sin A\sin B=0$，

所以 $\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A)=0$. …………………………………………………………………… 2 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\frac{1}{2}\sin A$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，…………………… 4 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)解法 1：因为 AD 为角平分线，所以 $S_{\triangle DAB}+S_{\triangle DAC}=S_{\triangle ABC}$，………………………… 6 分

所以$\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle DAB+\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle DAC=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$.

因为$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\angle DAB=\angle DAC=\frac{\pi}{6}$，$AD=\sqrt{3}$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{4}AB+\frac{\sqrt{3}}{4}AC=\frac{\sqrt{3}}{4}AB\cdot AC$，

所以 $AB+AC=AB\cdot AC$，即 $c+b=cb$. ……………………………………………………………… 8 分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=(b+c)^2-3bc$，$a=3\sqrt{2}$，

所以$(b+c)^2-3(b+c)-18=0$，…………………………………………………………………………… 10 分

所以 $b+c=6$ 或 $b+c=-3$(舍去)，所以 $b+c=6$. ……………………………………………………… 12 分

解法 2：由点 D 分别向 AB、AC 作垂足 E、F，因为 AD 为角平分线，

所以 $DE=DF=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $BD=\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{2\sin C}$，…………………………………… 6 分

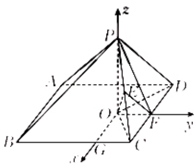
又因为 $BD+CD=BC=3\sqrt{2}$，所以$\frac{\sqrt{3}}{2\sin B}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin C}=3\sqrt{2}$. ①

由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2\sqrt{6}$，

所以$\frac{1}{\sin B}=\frac{2\sqrt{6}}{b}$，$\frac{1}{\sin C}=\frac{2\sqrt{6}}{c}$，代入①式得$\frac{b+c}{bc}=1$，即 $b+c=bc$. …………………… 8 分

如下同解法 1 参考答案解答过程.

20. (1)证明：取 CD 的中点 F，连接 EF，PF，OF，因为 E 为 PC 的中点，所以 $EF\parallel PD$.



又 $EF\not\subset$ 平面 PAD，$PD\subset$ 平面 PAD，所以 $EF\parallel$ 平面 APD. ……………………………………………………………………………… 1 分

因为 $OE\parallel$ 平面 PAD，$OE\cap EF=E$，所以平面 $OEF\parallel$ 平面 PAD. ……………………………………………………………………………… 2 分

因为平面 $ABCD\cap$ 平面 $OEF=OF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，

所以 $OF\parallel AD$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

因为 $AD\perp CD$，所以 $OF\perp CD$. ……………………………………………………………………… 4 分

由 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，可得 $PO\perp CD$. 又 $PO\cap OF=O$，所以 $CD\perp$ 平面 POF，从而 $PF\perp CD$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

因为 PF 是 CD 的中垂线，所以 $PC=PD$. ………………………………………………………… 6 分

(2)解：因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PCO=60°$，

又 $OC\perp OD$，$AB=CD=2$，$OF=\frac{1}{2}CD=1$，$OC=\sqrt{2}OF=\sqrt{2}$，所以 $PO=\sqrt{3}CO=\sqrt{6}$. ………………………………………………………………………………………… 7 分

作 $OG\perp BC$，垂足为 G，分别以 $\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D(-1,1,0)$，$B(1,-3,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{6})$，

$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{6})$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$. ………………………………………… 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=4y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=x_1+y_1-\sqrt{6}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{6},0,1)$. ……………………………… 9 分

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=2x_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=x_2+y_2-\sqrt{6}z_2=0,\end{cases}$ 令 $y_2=\sqrt{6}$，得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{6},1)$. ………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$，即平面 PBC 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{1}{7}$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

21. (1)解：设右焦点为 $F(c,0)$，一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，……………………………… 1 分

所以该焦点到渐近线的距离为 $\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=1$. …………………………………………… 2 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{42}}{6}$，所以 $a=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{7}$. ……………………………………………………… 3 分

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}-y^2=1$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：当直线 l 的斜率不存在时，l 的方程为 $x=\pm\sqrt{6}$，此时 $|PQ|=2$，$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{6}$ $=\sqrt{6}$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

当直线 l 的斜率存在时，不妨设 l：$y=kx+m$，且 $k\neq\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{6}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-6k^2)x^2-12mkx-6m^2-6=0$. ……………………… 6 分

由 $\Delta=144m^2k^2+4(1-6k^2)(6m^2+6)=0$，得 $6k^2=m^2+1$. ……………………………… 7 分

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m,\\ y=\frac{\sqrt{6}}{6}x,\end{cases}$ 得 $x=\frac{\sqrt{6}m}{1-\sqrt{6}k}$. ……………………………………………… 8 分

不妨设 l 与 $y=\frac{\sqrt{6}}{6}x$，$y=-\frac{\sqrt{6}}{6}x$ 的交点分别为 P，Q，则 $x_P=\frac{\sqrt{6}m}{1-\sqrt{6}k}$，同理可得 $x_Q=$

$-\frac{\sqrt{6}m}{1+\sqrt{6}k}$，所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|=\frac{2\sqrt{6}\,|m|\cdot\sqrt{k^2+1}}{|1-6k^2|}$. ………………………… 9 分

因为坐标原点 O 到 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{\sqrt{6}m^2}{|1-6k^2|}$. …… 10 分

因为 $6k^2=m^2+1$，所以 $S_{\triangle OPQ}=\sqrt{6}$. 故 $\triangle OPQ$ 的面积为定值，定值为 $\sqrt{6}$. ………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=\frac{1-a-\ln x}{x^2}$. ………………………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 2 分

当 $a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{1-a}$. ………………………………………………… 3 分

$x\in[1,e^{1-a})$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[1,e^{1-a})$ 上单调递增. ……………………………… 4 分

$x\in(e^{1-a},+\infty)$，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(e^{1-a},+\infty)$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)由(1)知，令 $a=0$，得 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)\leqslant f(e)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………… 6 分

因为 $x_1>x_2\geqslant 1$，所以 $(x_1-x_2)^{x_1x_2}=x_1^{x_2}x_2^{x_1}$，即 $x_1x_2\ln(x_1-x_2)=x_2\ln x_1+x_1\ln x_2$，即 $\ln(x_1-x_2)=\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}$. ……………………………………………………………… 7 分

因为 x_1,x_2 为正整数，所以 $x_1-x_2\geqslant 1$.

当 $x_1-x_2=1$ 时，$x_1^{x_2}x_2^{x_1}=1$，

因为 $x_2\geqslant 1$，$x_1\geqslant 2$，所以 $x_1^{x_2}x_2^{x_1}>1$，这与 $x_1^{x_2}x_2^{x_1}=1$ 矛盾，不符合题意. ……………… 8 分

当 $x_1-x_2>1$ 时，因为 $\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{1}{2}$，$\frac{\ln x_2}{x_2}<\frac{1}{2}$，所以 $\ln(x_1-x_2)=\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}<1$. …… 9 分

所以 $x_1-x_2<e$，得 $x_1-x_2=2$，即 $\ln 2=\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}$. ……………………………… 10 分

经检验，当 $x_2=1$，$x_1=3$ 时，不符合题意，

当 $x_2=2$，$x_1=4$ 时，符合题意.

当 $x_2=3$，$x_1=5$ 时，因为 $3^5\times 5^3<2^{15}$，所以 $\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 5}{5}<\ln 2$. ………………………… 11 分

当 $x_2\geqslant 4$ 时，$\frac{\ln x_1}{x_1}\leqslant\frac{\ln 6}{6}<\frac{\ln 5}{5}$，$\frac{\ln x_2}{x_2}\leqslant\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln 3}{3}$.

所以 $\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{\ln x_2}{x_2}<\frac{\ln 5}{5}+\frac{\ln 3}{3}<\ln 2$.

综上，仅存在 $x_1=4$，$x_2=2$ 满足条件. ………………………………………………… 12 分