

郑州市 2024 年高中毕业年级第一次质量预测

数学试题卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效,
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是正确的, 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 若 $z = \frac{i^{2024} + 2}{1 - i}$, 则 $|z| = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid y = \ln(x+1)\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 2 < 0\}$, 则 $\{x \mid x < 2\} = (\quad)$

- A. $(\complement_U A) \cup B$ B. $(\complement_U B) \cap A$ C. $\complement_U (A \cup B)$ D. $\complement_U (A \cap B)$

3. 已知 $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (2, 2)$, 则向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 方向上的投影向量为 (\quad)

- A. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ B. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ C. $(1, 1)$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = (e^x - e^{-x}) \sin x$, 则 $f'(1) = (\quad)$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. -1

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 + a_2 + a_3 = 7$, $a_7 + a_8 + a_9 = 13$, 则 $a_{13} + a_{14} + a_{15} = (\quad)$

- A. 19 B. 22 C. 25 D. 27

6. 已知抛物线 $C_1: y^2 = -2px (p > 0)$ 的焦点与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F_1 重合, 点 M 为抛物线 C_1 与椭圆 C_2 的公共点, 且 $MF_1 \perp x$ 轴, 则椭圆的离心率为 (\quad)

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{3} - 1$

7. 已知函数 $f(x) = 2 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1, 2]$, 则 ω 的取值范围为 (\quad)

- A. $\left[\frac{4}{3}, 2\right]$ B. $\left[\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$ C. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left[\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right]$

8. 已知 $a = \log_2 3, b = \log_4 5, c = \log_6 7$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $c > a > b$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $a > b > c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，选对但不全得 2 分，有选错的得 0 分。

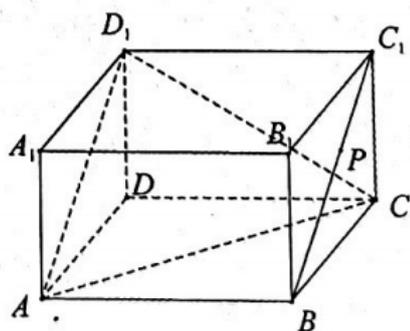
9. 溶液酸碱度是通过 pH 来计量的。pH 的计算公式为 $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$ ，其中 $[\text{H}^+]$ 表示溶液中氢离子的浓度，单位是摩尔/升。例如纯净水中氢离子的浓度为 10^{-7} 摩尔/升，则纯净水的 pH 是 7。当 $\text{pH} < 7$ 时，溶液呈酸性，当 $\text{pH} > 7$ 时，溶液呈碱性，当 $\text{pH} = 7$ （例如：纯净水）时，溶液呈中性。我国规定饮用水的 pH 值在 6.5—8.5 之间，则下列选项正确的是 ()（参考数据：取 $\lg 2 \approx 0.3$ ）

- A. 若苏打水的 pH 是 8，则苏打水中的氢离子浓度为 10^{-8} 摩尔/升
 B. 若胃酸中氢离子的浓度为 2.5×10^{-2} 摩尔/升，则胃酸的 pH 是 1.6
 C. 若海水的氢离子浓度是纯净水的 $10^{-1.6}$ 倍，则海水的 pH 是 8.6
 D. 若某种水中氢离子的浓度为 4×10^{-7} 摩尔/升，则该种水适合饮用

10. 掷一枚骰子，记事件 A：掷出的点数为偶数；事件 B：掷出的点数大于 2。则下列说法正确的是 ()

- A. $P(A) > P(B)$ B. $P(A\bar{B}) > P(\bar{A}B)$
 C. $P(AB) > P(\bar{A}\bar{B})$ D. $P(B|A) > P(A|B)$

11. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = BC = 2AA_1 = 2$ ，点 P 为线段 BC_1 上一动点，则下列说法正确的是 ()



- A. 直线 $A_1P \parallel$ 平面 ACD_1

B. 三棱锥 $P-ACD_1$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

C. 三棱锥 $A-CC_1D_1$ 的外接球的表面积为 $\frac{9\pi}{2}$

D. 直线 A_1P 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2,0)$, 动点 P 满足 $PA = \sqrt{2}PO$, 得到动点 P 的轨迹是曲线 C . 则下列说法正确的是 ()

A. 曲线 C 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 8$

B. 若直线 $y = kx + 4$ 与曲线 C 有公共点, 则 k 的取值范围是 $[2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}]$

C. 当 O, A, P 三点不共线时, 若点 $D(2 - 2\sqrt{2}, 0)$, 则射线 PD 平分 $\angle APO$

D. 过曲线 C 外一点 $(a-4, a)$ 作曲线 C 的切线, 切点分别为 M, N , 则直线 MN 过定点 $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分

13. 已知 $\frac{1 + \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})}{1 - \tan(\alpha - \frac{\pi}{4})} = 2$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

14. 2023 年 12 月 6 日上午, 2023 世界 5G 大会在郑州国际会展中心拉开帷幕. 世界 5G 大会是全球 5G 领域国际性盛会, 也是首次在豫举办. 本次大会以“5G 变革共绘未来”为主题, 以持续推动 5G 不断演进创新为目标. 现场邀请全球有影响力的科学家、企业家、国际组织负责人等参会, 并进行高层次、高水平交流研讨. 为确保大会顺利进行, 面向社会招聘优秀志愿者, 参与大会各项服务保障工作. 现从包含甲、乙的 6 人中选派 4 人参与“签到组”、“服务组”、“物料组”、“机动组”四个不同的岗位工作, 每人去一个组, 其中甲、乙至少有一人参加且甲不去“签到组”的选派方法共有 _____ 种. (用数字作答)

15. 已知 MN 是正四面体 $ABCD$ 的外接球的一条直径, 点 P 在正四面体表面上运动, 正四面体的棱长是 2, 则 $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$ 的取值范围为 _____.

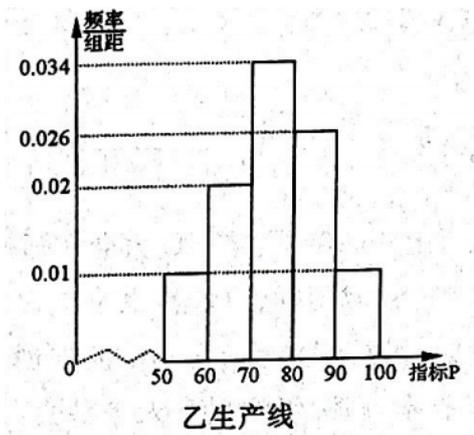
16. $\forall x \in (0, +\infty)$, 不等式 $e^x + 1 \geq 2 \left(a^2x + \frac{1}{x} \right) \ln(ax)$ 恒成立, 则正实数 a 的最大值是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某自行车厂为了解决复合材料制成的自行车车架应力不断变化问题, 在不同条件下研究结构纤维按不同方向及角度黏合强度, 在两条生产线上同时进行工艺比较实验, 为了比较某项指标 p 的对比情况, 随机地抽取了部分甲生产线上产品该项指标的 p 值, 并计算得到其平均数 $\bar{x} = 74$, 中位数 $x = 72$, 随机地抽得乙生产线上

100 件产品该项指标的 p 值，并绘制成如下的频率分布直方图.



(I) 求乙生产线的产品指标 p 值的平均数 \bar{y} 与中位数 y (每组值用中间值代替, 结果精确到 0.01), 并判断乙生产线较甲生产线的产品指标 p 值是否更好 (如果 $|\bar{y} - y| < |\bar{x} - x|$, 则认为乙生产线的产品指标 p 值较甲生产线的产品指标 p 值更好, 否则不认为更好).

(II) 用频率估计概率, 现从乙生产线上随机抽取 5 件产品, 抽出指标 p 值不小于 70 的产品个数用 X 表示, 求 X 的数学期望与方差.

18. (12 分)

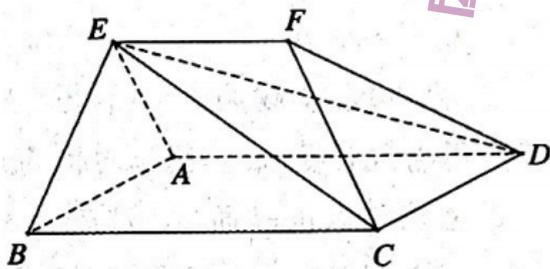
已知 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sqrt{3} \sin B + \cos B = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A}$.

(I) 求角 A 的值;

(II) 若点 D 满足 $\overline{BD} = 3\overline{DC}$, 且 $AD = BD$, 求 $\tan B$ 的值.

19. (12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $EF \parallel$ 平面 $AB-CD$, $\triangle EAB$ 为等边三角形, $BC = CE = 2AB = 2EF$, $\angle ABC = 60^\circ$.



(I) 求证: 平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$;

(II) 求平面 ECD 与平面 FCD 夹角的余弦值.

20. (12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 4a_{n+1} - 4$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 + \frac{b_2}{2^1} + \frac{b_3}{2^2} + \dots + \frac{b_n}{2^{n-1}} = a_n$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 在 b_n 和 b_{n+1} 之间插入 n 个数 $c_{n_1}, c_{n_2}, c_{n_3}, \dots, c_{n_n}$, 使得 $b_n, c_{n_1}, c_{n_2}, c_{n_3}, \dots, c_{n_n}, b_{n+1}$ 成等差数列, 设数列

$S_n = c_{n_1} + c_{n_2} + c_{n_3} + \dots + c_{n_n}$, 求数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)

已知点 A 是双曲线 $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 的上顶点.

(I) 若点 B 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$, 延长 AB 交双曲线于点 D , 求点 D 的坐标;

(II) 双曲线 C 与直线 $l: y = kx + m (k \neq \pm\sqrt{2})$ 有唯一的公共点 P , 过点 P 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴, y 轴于 $M(x, 0), N(0, y)$ 两点, 当点 P 运动时, 求点 $Q(x, y)$ 的轨迹方程.

22. (12分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + \cos x - 1$.

(I) 当 $a \geq 1$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$;

(II) 证明: $\frac{1}{\tan 1} + \frac{1}{2 \tan \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \tan \frac{1}{3}} + \dots + \frac{1}{n \tan \frac{1}{n}} > n - \frac{2n}{2n+1}$.