绝密★启用前

2023—2024学年高三一轮总复习验收考试

数学试卷

试卷共4页,19小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡指定位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,请将答题卡交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|x(x-3)<4\}$, $N=\{y|y<3\}$, 则 $M\cap N=$

A. $\varnothing$　　B. $\{x|-4<x<3\}$　　C. $\{x|-1<x<3\}$　　D. $\{x|1<x<3\}$

2. 已知定义在R上的函数 $f(x)=x^5+(a+1)x^4-2\,024$ 的导函数 $f'(x)$ 为偶函数,则 $f(a)=$

A. $-2\,025$　　B. $-2\,024$　　C. -1　　D. $2\,025$

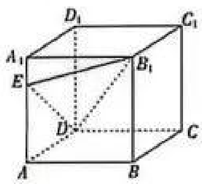
3. 已知 F 是抛物线 $C:x=2y^2$ 的焦点,点 $M(2,m)$ 在抛物线 C 上,则 $|MF|=$

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{9}{8}$　　D. $\frac{17}{8}$

4. 研究表明,地震时释放的能量 E(单位:焦耳)与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\lg E=4.8+1.5M$. 2023年12月18日在甘肃积石山县发生了里氏6.2级地震,2024年1月4日在斐济群岛发生了里氏5.7级地震,若前后这两个地震释放的能量之比是 n,则 n 的整数部分为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 已知一正方体木块 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为4,点 E 在棱 AA_1 上,且 $AE=3$. 现过 D,E,B_1 三点作一截面将该木块分开,则该截面的面积为



A. $4\sqrt{26}$　　B. $5\sqrt{17}$　　C. $2\sqrt{26}$　　D. $\frac{5\sqrt{17}}{2}$

6. 已知复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，且 $|2-i-z|=1$，则 $\dfrac{b+a}{a+1}$ 的取值范围为

A. $\left[\dfrac{-3-\sqrt{3}}{4},\dfrac{-3+\sqrt{3}}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{3}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{-3+\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$

C. $\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{4},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right]$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1+\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\dfrac{1}{2}\left(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其导函数为 $f'(x)$，且 $f(0)\cdot f'(0)=0$，$f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上恰有 4 个不同的实数 $x_i(i=1,2,3,4)$，使得对任意 x 都满足 $f(x)+f(2x_i-x)=1$，且对任意角 α，$f(x)$ 在区间 $\left(\alpha,\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上均不是单调函数，则 ω 的取值范围是

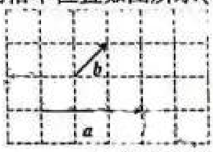
A. $\left(\dfrac{19}{12},\dfrac{25}{12}\right]$　　B. $\left(2,\dfrac{25}{12}\right]$　　C. $\left(\dfrac{19}{12},2\right)$　　D. $\left(\dfrac{25}{12},+\infty\right)$

8. 142 857 被称为世界上最神秘的数字，142 857 × 1 = 142 857，142 857 × 2 = 285 714，142 857 × 3 = 428 571，142 857 × 4 = 571 428，142 857 × 5 = 714 285，142 857 × 6 = 857 142，所得结果是这些数字反复出现，若 $a=e^{0.142\,857}$，$b=\dfrac{\ln 1.285\,714}{2}+1$，$c=\sqrt{1.285\,714}$，则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在由正方形组成的网格中位置如图所示（网格中面积最小的正方形边长为 1），则



A. $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$　　B. 存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

C. $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=7$　　D. 向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$

10. 化学中经常碰到正八面体结构（正八面体是每个面都是正三角形的八面体），如六氟化硫（化学式 SF_6）、金刚石等的分子结构. 将正方体六个面的中心连线可得到一个正八面体（如图 1），已知正八面体 $E-ABCD-F$ 的（如图 2）棱长为 2，则

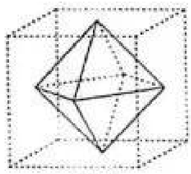


图 1

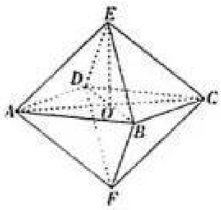


图 2

A. 正八面体 $E-ABCD-F$ 的内切球表面积为 $\dfrac{8\pi}{3}$

B. 正八面体 $E-ABCD-F$ 的外接球体积为 $\dfrac{8\pi}{3}$

C. 若点 P 为棱 EB 上的动点，则 $AP+CP$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

D. 若点 Q 为棱 AF 上的动点，则四棱锥 $E-QBC$ 的体积为定值 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

11. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$9a_na_{n+1}=a_n-4a_{n+1}$，数列$\{\frac{1}{a_n}\}$与数列$\{4^na_na_{n+1}\}$的前n项和分别为R_n，T_n，则

A. $\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{1}{4}$　　B. $T_n<\frac{1}{3}$

C. $S_n<\frac{43}{39}$　　D. $R_n\geqslant 6n^2-5n$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3+a_{10}=\frac{3\pi}{8}$，则$\cos S_{12}=$________.

13. "圆排列"亦称"循环排列""环排列"，最早出现在中国《易经》的四象八卦组合. 当A，B，C三位同学围成一个圆时，其中一个排列"ABC"与该排列旋转一个或几个位置得到的排列"BCA"或"CAB"是同一个排列，现有六位同学围成一个圆做游戏，其排列总数为________.（用数字作答）

14. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过点$F_2$且斜率为1的直线$l$与$C$的右支交于$A$，$B$两点，若$\triangle F_1AB$的内心恰好在它的一条高线上，则$C$的离心率为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$\frac{\sqrt{3}\cos A}{3}-\frac{a\cos C}{2b}=\frac{c\cos A}{2b}$.

（1）求A；

（2）若$a^2+c^2-b^2=ac$，点D在边AB上，$BD=2AD$，$CD=\sqrt{13}$，求$\triangle ABC$的面积.

16.（15分）2024年1月5日起，第40届中国·哈尔滨国际冰雪节在黑龙江省哈尔滨市举行，让大家对冰雪文化进一步了解，激发了大家对冰雪运动进一步的热爱. 为了调查不同年龄层的人对"冰雪运动"的喜爱态度，某研究小组随机调查了哈尔滨市M社区年龄在$[20,70)$的市民300人，所得结果统计如下频数分布表所示.

年龄a（单位：周岁）	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$	$[60,70)$
频数	30	81	99	60	30
持喜爱态度	24	65	75	30	12

（1）求该样本中市民年龄的平均数；（同一组中的数据用该区间的中点值作代表）

（2）从这300名市民中随机抽取1人，在此人喜爱冰雪运动的前提下，求其年龄小于50周岁的概率；

（3）为鼓励市民积极参加这次调查，该研究小组决定给予参加调查的市民一定的奖励，奖励方案有两种：

方案一：按年龄a进行分类奖励，当$a<30$时，奖励10元；当$30\leqslant a<50$时，奖励30元；当$a\geqslant 50$时，奖励40元；

方案二：利用抽奖的方式获得奖金，其中年龄低于样本中位数的可抽 1 次奖，年龄不低于样本中位数的可抽 2 次奖. 每次抽中奖励 30 元，未抽中奖励 10 元，各次抽奖间相互独立，且每次抽奖中奖的概率均为$\frac{2}{3}$.

将频率视为概率，利用样本估计总体的思想，若该研究小组希望最终发出更多的奖金，则从期望角度出发，该研究小组应采取哪种方案.

17. (15 分)已知等边$\triangle ABC$的边长为4，E、F、H分别是边AB、BC、AC的中点(如图1)，现以EF为折痕把$\triangle BEF$折起，使点B到达点B'的位置，且$HB'=3$(如图2).

(1)证明：$AC\perp HB'$；

(2)在线段$B'H$上是否存在点M，使得M到平面$B'EF$的距离为$\frac{3}{4}$，若存在，求出$\frac{B'M}{MH}$的值；若不存在，请说明理由.

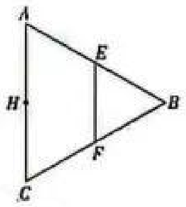


图1

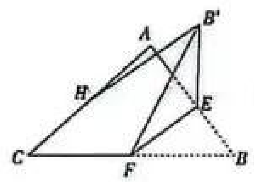


图2

18. (17 分)已知椭圆$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为$F$，过$N(2,0)$的直线$l$与$C$交于$A,B$两点.

(1)若点M为C上一动点，求$|MF|+|MN|$的最大值与最小值；

(2)若$\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NB}$，求$l$的斜率；

(3)在x轴上是否存在定点Q，使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$为定值？若存在，求出定点$Q$的坐标；若不存在，请说明理由.

19. (17 分)已知函数$g(x)=1-2\ln x-\frac{a}{x^2}(a>0)$，且$g(x)$的极值点为$x_0$.

(1)求x_0；

(2)证明：$2g(x_0)+2\leqslant\frac{2}{a}$；

(3)若函数$g(x)$有两个不同的零点x_1,x_2，证明：$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2g(x_0)+2$.

2023—2024 学年高三一轮总复习验收考试

数学参考答案及评分细则

1.【答案】C

【解析】由 $M=\{x|x^2-3x-4<0\}=\{x|-1<x<4\}$，则 $M\cap N=\{x|-1<x<3\}$. 故选 C.

2.【答案】A

【解析】$f'(x)=5x^4+4(a+1)x^3$，又 $f'(x)$ 为偶函数，所以 $4(a+1)=0$，即 $a=-1$，所以 $f(x)=x^5-2\,024$，$f(a)=f(-1)=-2\,025$. 故选 A.

3.【答案】D

【解析】把 $x=2y^2$ 化为标准方程 $y^2=\frac{1}{2}x$ 得 $p=\frac{1}{4}$，$|MF|=\frac{1}{8}+2=\frac{17}{8}$. 故选 D.

4.【答案】C

【解析】设前后两次地震释放的能量分别为 E_1,E_2，由已知得 $\lg E_1=4.8+1.5\times6.2$，$\lg E_2=4.8+1.5\times5.7$，

$\therefore \lg\frac{E_1}{E_2}=1.5\times0.5=0.75$，$\therefore n=\frac{E_1}{E_2}=10^{0.75}=10^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{1\,000}$，$5^4<1\,000<6^4$，$\therefore 5<\sqrt[4]{1\,000}<6$，$\therefore n=\sqrt[4]{1\,000}\in(5,6)$. 故选 C.

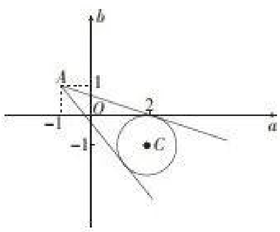
5.【答案】A

【解析】过 D,E,B_1 三点的截面是以 DE,B_1E 为邻边的平行四边形，$\because DE=5$，$B_1E=\sqrt{17}$，$DB_1=4\sqrt{3}$，

$\therefore \cos\angle DEB_1=\frac{17+25-48}{2\times5\times\sqrt{17}}=-\frac{3}{5\sqrt{17}}$，$\therefore \sin\angle DEB_1=\frac{4\sqrt{26}}{5\sqrt{17}}$，$\therefore$ 截面面积为 $5\times\sqrt{17}\times\frac{4\sqrt{26}}{5\sqrt{17}}=4\sqrt{26}$. 故选 A.

6.【答案】C

【解析】由复数的几何意义可知，$|2-\mathrm{i}-z|=1$ 即为 $|z-2+\mathrm{i}|=1$，故复数 z 在复平面内对应的点 $Z(a,b)$ 的轨迹是以 $(2,-1)$ 为圆心，1 为半径的圆 C，即圆 $C:(a-2)^2+(b+1)^2=1$，如图，$\frac{b+a}{a+1}=\frac{b-1}{a+1}+1$，而 $\frac{b-1}{a+1}$ 的几何意义为过圆 C 上的点与定点 $A(-1,1)$ 的直线 l 的斜率 k，直线 l 的方程为 $ka-b+k+1=0$，由题意可知，圆心 C 到直线 l 的距离 $d\leqslant1$，即 $\frac{|3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$，解得 $\frac{-3-\sqrt{3}}{4}\leqslant k\leqslant\frac{-3+\sqrt{3}}{4}$，即 $\frac{-3-\sqrt{3}}{4}\leqslant\frac{b-1}{a+1}\leqslant\frac{-3+\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{1-\sqrt{3}}{4}\leqslant\frac{b+a}{a+1}\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{4}$. 故选 C.



7.【答案】B

【解析】$\because f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\frac{1}{2}$，$\therefore f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$，$\therefore f(0)\cdot f'(0)=\left(\sin\varphi+\frac{1}{2}\right)\omega\cos\varphi=0$，$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin\varphi=-\frac{1}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，由 $f(x)+f(2x_i-x)=1$ 可得 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(x_i,\frac{1}{2}\right)$ 对称，$\therefore \sin\left(\omega x_i-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即 $\sin\left(\omega x_i-\frac{\pi}{6}\right)=0$，当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right)$，函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},+\infty\right)$ 上的前 5 个零点依次为 $0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$，可得 $3\pi<2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant 4\pi$，解得 $\frac{19}{12}<\omega\leqslant\frac{25}{12}$，又 $\because f(x)$ 在 $\left(\alpha,\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ 上不是单调函数，$\therefore \frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}<\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega>2$，综上 $2<\omega\leqslant\frac{25}{12}$. 故选 B.

8.【答案】D

【解析】记 $f(x)=e^x-x-1(x>0)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)=e^x-x-1>f(0)=0$，所以 $e^x>x+1(x>0)$，因为 $x^2+2x+1>1+2x(x>0)$，所以 $x+1>\sqrt{1+2x}(x>0)$，所以 $e^x>\sqrt{1+2x}(x>0)$，所以 $e^{0.142\,857}>\sqrt{1+2\times 0.142\,857}$，即 $a>c$；由 $e^x>x+1(x>0)$，易得 $x>\ln x+1(x>1)$，所以 $\sqrt{1.285\,714}>\ln\sqrt{1.285\,714}+1=\frac{\ln 1.285\,714}{2}+1$，即 $c>b$. 综上 $a>c>b$. 故选 D.

9.【答案】AC（每选对 1 个得 3 分）

【解析】$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，A 正确；由图可知，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，故不存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，B 错误；设网格中方向向右、向上的单位向量分别为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$，且 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(5\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=7$，C 正确；由图可知，向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量方向向右，模长为 1，所以向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，D 错误. 故选 AC.

10.【答案】ACD（每选对一个得 2 分）

【解析】设该正八面体内切球的半径为 r，由内切球的性质可知正八面体的体积 $V=8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ\cdot r=2\times\frac{1}{3}\times 2\times 2\times\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故它的内切球表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{8\pi}{3}$，故 A 正确；设该正八面体外接球的半径为 R，易知 EF 为正八面体外接球的直径，$2R=2\sqrt{2}$，解得 $R=\sqrt{2}$，所以正八面体外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，故 B 错误；当 P 为 EB 的中点时，$AP\perp EB$，$CP\perp EB$，此时 $AP+CP$ 取得最小值为 $2\sqrt{3}$，故 C 正确；易知 $AF/\!/EC$，因为 $AF\not\subset$ 平面 EBC，$EC\subset$ 平面 EBC，所以 $AF/\!/$ 平面 EBC，所以 $V_{三棱锥E-QBC}=V_{三棱锥Q-EBC}=V_{三棱锥A-EBC}=V_{三棱锥E-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.

11.【答案】BCD（每选对一个得 2 分）来源：高三答案公众号

【解析】将 $9a_na_{n+1}=a_n-4a_{n+1}$ 两边同时除以 a_na_{n+1}，得 $9=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{4}{a_n}$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}+3=4\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，故数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}+3=4$ 为首项，4 为公比的等比数列，$\therefore \frac{1}{a_n}+3=4^n$，即 $a_n=\frac{1}{4^n-3}$. 对于 A，$\because a_n=\frac{1}{4^n-3}>0$，$\therefore 9a_na_{n+1}=a_n$

$-4a_{n+1}>0$，$\therefore 4a_{n+1}<a_n$，即$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{4}$，A 错误；对于 B，$4^na_na_{n+1}=\frac{4^n}{(4^n-3)(4^{n+1}-3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^n-3}-\frac{1}{4^{n+1}-3}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{4^2-3}\right)+\left(\frac{1}{4^2-3}-\frac{1}{4^3-3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4^n-3}-\frac{1}{4^{n+1}-3}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}-3}\right)<\frac{1}{3}$，B 正确；对于 C，$a_n=\frac{1}{4^n-3}=\frac{1}{4^n\left(1-\frac{3}{4^n}\right)}\leqslant\frac{1}{4^n\left(1-\frac{3}{4^2}\right)}=\frac{1}{13\times4^{n-2}}(n\geqslant2)$，$\therefore S_n\leqslant1+\frac{1}{13\times4^0}+\frac{1}{13\times4^1}+\cdots+\frac{1}{13\times4^{n-2}}=1+\frac{1}{13}\times\frac{1-\frac{1}{4^{n-1}}}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{4}{39}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)<1+\frac{4}{39}=\frac{43}{39}$，故 C 正确；对于 D，$R_n=(4^1-3)+(4^2-3)+\cdots+(4^n-3)=\frac{4}{3}(4^n-1)-3n$，当 $n=1$ 时，$R_n\geqslant6n^2-5n$ 显然成立，当 $n\geqslant2$ 时，$4^n=(1+3)^n\geqslant C_n^0+3C_n^1+9C_n^2=\frac{9n^2-3n+2}{2}$，所以 $R_n=\frac{4}{3}(4^n-1)-3n\geqslant\frac{4}{3}\times\frac{9n^2-3n}{2}-3n=6n^2-5n$，D 正确. 故选 BCD.

12.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】$S_{12}=\frac{12(a_3+a_{10})}{2}=6(a_3+a_{10})=\frac{9\pi}{4}$，所以 $\cos S_{12}=\cos\frac{9\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.【答案】120

【解析】A,B,C 三位同学围成一个圆，"ABC""BCA"或"CAB"是同一排列，其中每一个圆排列可以拆成任意一位同学为首的直线排列 3 个. 三位同学围成一个圆的排列总数为$\frac{1}{3}A_3^3$，由此可得六位同学围成一个圆的排列总数为$\frac{1}{6}A_6^6=120$.

14.【答案】$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$

【解析】三角形的内心必在该三角形的角平分线上，又内心在一条高线上，则这条高线与该三角形的一条角平分线重合，于是可知该三角形为等腰三角形. 设 $F_2(c,0)$，故直线 l 为 $y=x-c$，代入 C 的方程可得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(x-c)^2}{b^2}=1$，即$(b^2-a^2)x^2+2a^2cx-a^2(c^2+b^2)=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $x_1x_2=\frac{-a^2(c^2+b^2)}{b^2-a^2}>0$，故 $b^2-a^2<0$ 即 $c^2-2a^2<0$，所以 $e^2-2<0$，结合 $e>1$ 可得 $1<e<\sqrt{2}$，不妨设点 B 在 x 轴的下方，点 A 在 x 轴的上方，设 $|AF_2|=m$，$|BF_2|=n$，由双曲线定义可得 $|AF_1|=2a+m$，$|BF_1|=2a+n$，①当 $|AF_1|=|AB|$ 时，$m+2a=m+n$，即 $2a=n$，故 $|BF_1|=4a$，$|BF_2|=2a$，因为直线 l 的斜率为 1，所以倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，即$\angle BF_2F_1=\frac{\pi}{4}$，在$\triangle BF_2F_1$ 中，由余弦定理可得 $|BF_1|^2=|BF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|BF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle BF_2F_1$，即 $16a^2=4a^2+4c^2-2\times2a\cdot2c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c^2-\sqrt{2}ac-3a^2=0$，所以 $e^2-\sqrt{2}e-3=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}>\sqrt{2}$，舍去；②当 $|BF_1|=|AB|$ 时，$n+2a=m+n$，即 $2a=m$，故 $|AF_1|=4a$，$|AF_2|=2a$，因为直线 l 的斜率为 1，所以倾斜角为$\frac{\pi}{4}$，即$\angle AF_2F_1=\frac{3\pi}{4}$，在$\triangle AF_2F_1$ 中，

由余弦定理可得$|AF_1|^2=|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|AF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle AF_2F_1$，即$16a^2=4a^2+4c^2+2\times2a\cdot2c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$c^2+\sqrt{2}ac-3a^2=0$，所以$e^2+\sqrt{2}e-3=0$，解得$e=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$，因为$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}-\sqrt{2}=\frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}=\frac{-\sqrt{18}+\sqrt{14}}{2}<0$，$\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\right)^2=\frac{2+14-4\sqrt{7}}{4}=4-\sqrt{7}>1$，所以$1<\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}<\sqrt{2}$，满足题意；③当$|BF_1|=|AF_1|$时，直线$l$垂直于$x$轴，与题意矛盾，故舍去. 综上，$C$的离心率为$\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$.

15. 解：(1)由$\frac{\sqrt{3}\cos A}{3}-\frac{a\cos C}{2b}=\frac{c\cos A}{2b}$，

得$2b\cos A-\sqrt{3}a\cos C=\sqrt{3}c\cos A$.

由正弦定理得$2\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos A=\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin B$，(3 分)

$\because 0<B<\pi$，$\therefore \sin B\neq0$，$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，(5 分)

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{6}$. (6 分)

(2)由余弦定理，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

又$0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. (7 分)

$\therefore C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$，$\therefore b=\sqrt{3}a$，(8 分)

$\because BD=2AD$，$\therefore \overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，(9 分)

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2=\frac{4}{9}b^2+\frac{1}{9}a^2=\frac{13}{9}a^2=13$，

$\therefore a=3$，$b=3\sqrt{3}$，(11 分)

$\therefore \triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. (13 分)

【评分细则】

1. 解题过程中，未强调$0<A<\pi$，$0<B<\pi$均不扣分；
2. 第(2)问也可不构造向量，而是利用余弦定理求解，此时酌情给分.

16. 解：(1)样本中市民年龄的平均数为$\bar{x}=\frac{1}{300}\times(30\times25+81\times35+99\times45+60\times55+30\times65)=44.3$. (3 分)

(2)设事件A表示抽中的此人喜爱冰雪运动，事件B表示抽中的此人年龄在 50 周岁以下.

则由频数分布表可知$P(A)=\frac{24+65+75+30+12}{300}=\frac{206}{300}$，$P(AB)=\frac{24+65+75}{300}=\frac{164}{300}$，

所以在此人喜爱冰雪运动的前提下，其年龄小于 50 周岁的概率为$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{164}{206}=\frac{82}{103}$. (6 分)

(3)对于方案一，设每名参与调查的市民可获得的奖金为X元，则X的所有可能取值为 10，30，40，

其对应的概率分别为$\frac{1}{10},\frac{3}{5},\frac{3}{10}$,

故 $EX=10\times\frac{1}{10}+30\times\frac{3}{5}+40\times\frac{3}{10}=31$.(9 分)

对于方案二,设每名参与调查的市民可获得的奖金为 Y 元,则 Y 的所有可能取值为 10,20,30,40,60.

可得 $P(Y=10)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;$P(Y=20)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$;

$P(Y=30)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$;$P(Y=40)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

$P(Y=60)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

所以 $EY=10\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{18}+30\times\frac{1}{3}+40\times\frac{2}{9}+60\times\frac{2}{9}=35$,(14 分)

因为 $EX<EY$,所以从数学期望的角度分析,该研究小组应采取方案二.(15 分)

【评分细则】

1. 第(2)问也可用古典概型概率公式求解,若答案无误不扣分;
2. 第(3)问中计算各概率值时,概率值未写成最简分数的形式不扣分.

17. (1)证明:$\because E,F$ 分别是边 AB,BC 的中点,$\therefore EF/\!/AC$,

连接 BH 交 EF 于 O,连接 $B'O$,

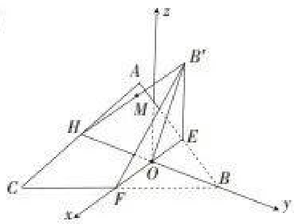
由折叠可知,$EF\perp OB'$,$EF\perp OH$,$OB'\cap OH=O$,$\therefore EF\perp$平面 $OB'H$,

$\therefore AC\perp$平面 $OB'H$,$\because HB'\subset$平面 $OB'H$,$\therefore AC\perp HB'$.(5 分)

(2)解:$\because$ 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 4,$\therefore HB=2\sqrt{3}$,$\therefore OB'=OH=\sqrt{3}$,

$\because HB'=3$,$\therefore \cos\angle B'OH=\frac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$,$\therefore \angle B'OH=120°$,(7 分)

以 O 为坐标原点,OF,OB 所在直线为 x,y 轴,过 O 作垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B'\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,$H(0,-\sqrt{3},0)$,$E(-1,0,0)$,$F(1,0,0)$,

$\therefore \overrightarrow{OB'}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{OH}=(0,-\sqrt{3},0)$,(8 分)

设$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OB'}+(1-\lambda)\overrightarrow{OH}$

$=\lambda\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)+(1-\lambda)(0,-\sqrt{3},0)$

$=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda-\sqrt{3},\frac{3}{2}\lambda\right)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,(10 分)

在平面 $B'EF$ 中,$\overrightarrow{EF}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{OB'}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,

不妨设平面 $B'EF$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OB'}=\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}z=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=2x=0, \end{cases}$令 $y=-\sqrt{3}$，得 $x=0,z=1$，

所以平面 $B'EF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,-\sqrt{3},1)$，(12 分)

$\therefore$ 点 M 到平面 $B'EF$ 的距离为$\frac{|\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|-3\lambda+3|}{2}=\frac{3}{4}$，(13 分)

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$或 $\lambda=\frac{3}{2}$(舍去)，$\therefore M$ 为 HB'的中点，$\therefore\frac{B'M}{MH}=1$，

$\therefore$ 满足条件的点 M 存在，且$\frac{B'M}{MH}=1$. (15 分)

【评分细则】

1. 第(1)问可用空间向量法求解，此时酌情给分；

2. 第(2)问可用常规方法求解，此时酌情给分.

18. 解：(1) 设 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-\sqrt{3},0)$，$F(\sqrt{3},0)$，

$|MF|+|MN|=2\sqrt{6}+(|MN|-|MF'|)\leqslant 2\sqrt{6}+|F'N|=2\sqrt{6}+\sqrt{3}+2$，

当且仅当点 M 与 C 的左顶点重合时取等号，

即 $|MF|+|MN|$的最大值为 $2\sqrt{6}+\sqrt{3}+2$，(3 分)

$|MF|+|MN|=2\sqrt{6}-(|MF'|-|MN|)\geqslant 2\sqrt{6}-|F'N|=2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2$，

当且仅当点 M 与 C 的右顶点重合时取等号，

即 $|MF|+|MN|$的最小值为 $2\sqrt{6}-\sqrt{3}-2$. (5 分)

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由$\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NB}$，

得$(2-x_1,-y_1)=2(x_2-2,y_2)$，所以$\begin{cases} x_1=6-2x_2, \\ y_1=-2y_2, \end{cases}$

又 A,B 在 C 上，所以$\begin{cases} \frac{2(3-x_2)^2}{3}+\frac{4y_2^2}{3}=1, \\ \frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1, \end{cases}$

解得$\begin{cases} x_2=\frac{9}{4}, \\ y_2=\pm\frac{\sqrt{30}}{8}, \end{cases}$即 $B\left(\frac{9}{4},\pm\frac{\sqrt{30}}{8}\right)$. (9 分)

故直线 l 的斜率为 $k_{BN}=\frac{\pm\frac{\sqrt{30}}{8}-0}{\frac{9}{4}-2}=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}$. (10 分)

(3) 假设满足条件的点存在，设 $Q(m,0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2+y_1y_2$，

当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=k(x-2)$，

把 $y=k(x-2)$ 代入 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，得 $(2k^2+1)x^2-8k^2x+8k^2-6=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-6}{2k^2+1}$，

$\Delta=64k^4-4(2k^2+1)(8k^2-6)=8(2k^2+3)>0$，(12 分)

$y_1y_2=k(x_1-2)\cdot k(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=k^2\left(\frac{8k^2-6}{2k^2+1}-\frac{16k^2}{2k^2+1}+\frac{8k^2+4}{2k^2+1}\right)=\frac{-2k^2}{2k^2+1}$，

所以 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\frac{8k^2-6}{2k^2+1}-\frac{8mk^2}{2k^2+1}+\frac{2m^2k^2+m^2}{2k^2+1}-\frac{2k^2}{2k^2+1}=\frac{2k^2(m^2-4m+3)+m^2-6}{2k^2+1}$ 为定值，

所以 $m^2-4m+3=m^2-6$，解得 $m=\frac{9}{4}$，(14 分)

$\therefore$ 存在定点 $Q\left(\frac{9}{4},0\right)$，使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值 $-\frac{15}{16}$；(15 分)

当直线 l 的斜率不存在时，易得 $A(2,1)$，$B(2,-1)$ 满足 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值 $-\frac{15}{16}$.(16 分)

综上，存在定点 $Q\left(\frac{9}{4},0\right)$，使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值.(17 分)

【评分细则】

1. 第(1)问中若未强调取等号的条件，缺 1 个扣 1 分；
2. 第(2)问也可利用韦达定理求解，此时酌情给分；
3. 第(3)问中未考虑直线 l 的斜率不存在这一种情形，扣 1 分；
4. 第(3)问中，也可设直线 l 的方程为 $x=my+1$，此时酌情给分.

19. (1)解：由 $g(x)=1-2\ln x-\frac{a}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{-2(x^2-a)}{x^3}=\frac{-2(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{x^3}$，(2 分)

所以当 $x\in(0,\sqrt{a})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，(3 分)

所以 $x=\sqrt{a}$ 为 $g(x)$ 的极大值点，即 $x_0=\sqrt{a}$.(4 分)

(2)证明：由题意 $g(\sqrt{a})=-\ln a(a>0)$，(5 分)

要证 $2g(x_0)+2\leqslant\frac{2}{a}$，只需证 $\frac{1}{a}+\ln a-1\geqslant0$，(6 分)

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$，即 $\ln x+\frac{1}{x}-1\geqslant0$，所以 $2g(x_0)+2\leqslant\frac{2}{a}$.(9 分)

(3)证明：因为 x_1,x_2 是 $g(x)$ 的两个不同的零点，

所以 $g(x_1)=1-2\ln x_1-\frac{a}{x_1^2}=0, g(x_2)=1-2\ln x_2-\frac{a}{x_2^2}=0$,

两式相减并整理得 $\frac{2}{a}=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$. (11 分)

设 $x_2>x_1>0$,由(2)知 $2g(x_0)+2\leqslant\frac{2}{a}$,

所以要证 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2g(x_0)+2$,只需证 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2x_2^2\ln\frac{x_2}{x_1}}$,即证 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{\frac{x_2^2}{x_1^2}-1}{\frac{x_2^2}{x_1^2}+1}$. (13 分)

设 $\frac{x_2}{x_1}=t\in(1,+\infty)$,下面就只需证 $\ln t>\frac{t^2-1}{t^2+1}(t>1)$,

设 $S(t)=\ln t-\frac{t^2-1}{t^2+1}(t>1)$,则 $S'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4t}{(t^2+1)^2}=\frac{(t^2-1)^2}{t(t^2+1)^2}>0$,

所以 $S(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,从而 $S(t)>S(1)=0$,

所以 $\ln t>\frac{t^2-1}{t^2+1}(t>1)$ 成立,从而 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>2g(x_0)+2$. (17 分)

【评分细则】

如用其他解法酌情给分.