长郡中学 2024 届高三模拟考试（一）

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.D　2.B　3.D　4.A　5.C　6.B　7.D　8.D

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.ABC　10.BCD　11.BC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

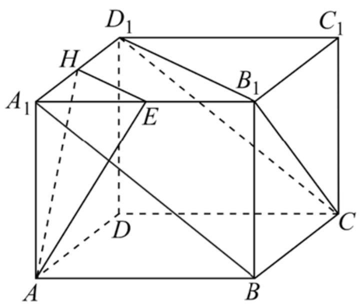
12.7　13.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　14.$\frac{57+5\sqrt{57}}{114}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【解析】（1）连接 BA_1，因为 $BC \parallel D_1A_1, BC = D_1A_1$，

所以四边形 BCD_1A_1 为平行四边形，所以 $CD_1 \parallel BA_1$，

因为 $AE \perp CD_1$，所以 $AE \perp BA_1$.



因为 $\angle AA_1B + \angle A_1AE = 90^\circ, \angle A_1AE + \angle A_1EA = 90^\circ$，

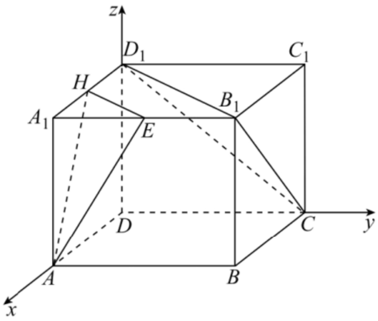
所以 $\angle AA_1B = \angle A_1EA$，所以 $\triangle BAA_1 \sim \triangle AA_1E$，

所以 $\frac{A_1E}{AA_1} = \frac{AA_1}{AB}$，所以 $AA_1^2 = A_1E \cdot AB = 1 \times 2 = 2$，

所以 $AA_1=\sqrt{2}$.

所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=AB\times AD\times AA_1=4\sqrt{2}$.

（2）以 D 为坐标原点，分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0),E\left(2,1,\sqrt{2}\right),H\left(1,0,\sqrt{2}\right),C(0,2,0),B_1\left(2,2,\sqrt{2}\right),D_1\left(0,0,\sqrt{2}\right)$

设平面 AEH 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AH}=\left(-1,0,\sqrt{2}\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases},\begin{cases}y+\sqrt{2}z=0\\ -x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $x=\sqrt{2},y=-\sqrt{2}$，

则平面 AEH 的法向量为 $\vec{m}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},1\right)$.

设平面 CB_1D_1 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\overrightarrow{CB_1}=\left(2,0,\sqrt{2}\right),\overrightarrow{CD_1}=\left(0,-2,\sqrt{2}\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0\end{cases},\begin{cases}2x_1+\sqrt{2}z_1=0\\ -2y_1+\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=1$，则 $z_1=\sqrt{2},x_1=-1$，

则平面 CB_1D_1 的法向量为 $\vec{n}=\left(-1,1,\sqrt{2}\right)$.

$$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot\vec{n}|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以平面 AEH 与平面 CB_1D_1 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16.【解析】（1）Y 的可能取值为$1、2、3$，

$P(Y=1)=\frac{1}{3}$，

$P(Y=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

$P(Y=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}$，

所以Y 的分布列为

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(Y)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$.

（2）$P(X=1)=\frac{1}{3}$，

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，

则$P(X<Y)=P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=1)\times P(Y=3)+P(X=2)\times P(Y=3)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$.

17.【解析】（1）$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均是周期数列，理由如下：

因为$a_{n+1}=\sin(n+1)\pi=0=\sin n\pi=a_n$，

所以数列$\{a_n\}$是周期数列，其周期为 1（或任意正整数）.

因为$b_{n+3}=b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n-b_{n+1}=-b_n$，

所以$b_{n+6}=-b_{n+3}=b_n$.

所以数列$\{b_n\}$是周期数列，其周期为 6（或 6 的正整数倍）.

（2）当m 是奇数时，首先证明$k\geq 2m+5$不存在数列满足条件.

假设$k\geq 2m+5$，即对于$1\leq i\leq 2m+5$，都有$a_i=b_i$.

因为$a_{m+t}=b_{m+t}\,(5\leq t\leq m+4)$，

所以$a_{t-2}=b_{t-4}=a_{t-4}\,(5\leq t\leq m+4)$，

即$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{m+2}$，及$a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{m+1}$.

又 $t=m+5$ 时，$a_1=a_{2(m+2)+1}=b_{2m+5}=b_{m+1}=a_{m+1}$，

所以 $a_{n+1}=a_n$，与 T_1 的最小值是 $m+2$ 矛盾.

其次证明 $k=2m+4$ 存在数列满足条件.

取 $a_{(m+2)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1\left(1\le k\le \dfrac{m+3}{2}\right)\\ 2, i=2k\left(1\le k\le \dfrac{m+1}{2}\right)\end{cases}(l\in\mathbf{N})$

及 $b_{(m+4)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1\left(1\le k\le \dfrac{m+3}{2}\right)\\ 2, i=2k\left(1\le k\le \dfrac{m+1}{2}\right)\\ 1, i=m+3\\ 2, i=m+4\end{cases}(l\in\mathbf{N})$,

对于 $1\le i\le 2m+4$，都有 $a_i=b_i$.

当 m 是偶数时，首先证明 $k\ge 2m+4$ 时不存在数列满足条件.

假设 $k\ge 2m+4$，即对于 $1\le i\le 2m+4$，都有 $a_i=b_i$.

因为 $a_{m+t}=b_{m+t}\left(5\le t\le m+3\right)$，

所以 $a_{t-2}=b_{t-4}=a_{t-4}\left(5\le t\le m+3\right)$，

即 $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{m+1}$，及 $a_2=a_4=a_6=\cdots=a_m$.

又 $t=m+4$ 时，$a_{m+2}=b_m=a_m$，

所以 $a_{n+2}=a_n$，与 T_1 的最小值是 $m+2$ 矛盾.

其次证明 $k=2m+3$ 时存在数列满足条件.

取 $a_{(m+2)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1\left(1\le k\le \dfrac{m+2}{2}\right)\\ 2, i=2k\left(1\le k\le \dfrac{m}{2}\right)\\ 3, i=m+2\end{cases}\quad(l\in\mathbf{N})$

及 $b_{(m+4)l+i}=\begin{cases}1, i=2k-1\left(1\le k\le \dfrac{m+2}{2}\right)\\ 2, i=2k\left(1\le k\le \dfrac{m}{2}\right)\\ 3, i=m+2\\ 1, i=m+3\\ 2, i=m+4\end{cases}\quad (l\in\mathbf{N})$

对于 $1\le i\le 2m+3$，都有 $a_i=b_i$.

综上，当 m 是奇数时，k 的最大值为 $2m+4$；

当 m 是偶数时，k 的最大值为 $2m+3$.

18.【解析】（1）由题意知 $P\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，

设点 $A\left(x_0,y_0\right)$，

因为点 A 是线段 PB 的中点，

所以 $B\left(2x_0+\dfrac{1}{2},2y_0\right)$，

又点 A,B 都在抛物线 C 上，

所以 $\begin{cases}y_0^2=2x_0\\ 4y_0^2=2\left(2x_0+\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$，

解得 $x_0=\dfrac{1}{4}, y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以点 A 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 或 $\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

（2）由题意可知直线 AB 的斜率存在且不为 0，

设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right), k\ne 0, A\left(x_1,y_1\right), B\left(x_2,y_2\right)$，

由点 A 在点 B 的左侧，则 $0<x_1<x_2$，

设 $D\left(x_3,y_3\right)$，直线 BD 与 x 轴交于点 E，

联立$\begin{cases} y=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \\ y^2=2x \end{cases}$，得$k^2x^2+\left(k^2-2\right)x+\dfrac{k^2}{4}=0$，

由$\Delta=\left(k^2-2\right)^2-k^4=4-4k^2>0$，得$-1<k<1,k\neq 0$，

$x_1+x_2=\dfrac{2-k^2}{k^2},x_1x_2=\dfrac{1}{4}$，

所以$0<x_1<\dfrac{1}{2}<x_2$，

所以直线AF的斜率存在，

由题可得$F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，

所以直线AF的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1-\dfrac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，

与$y^2=2x$联立得，$y_1^2x^2-\left(y_1^2+2x_1^2-2x_1+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{1}{4}y_1^2=0$，

化简得$2x_1x^2-\left(2x_1^2+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{1}{2}x_1=0$，

解得$x=\dfrac{1}{4x_1}$或$x=x_1$，

因为直线AF的斜率存在，

所以$x_3=\dfrac{1}{4x_1}=x_2$，

所以$BD\perp x$轴.

所以$S_{\triangle BDP}=\dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2\left|y_2\right|$，

$\triangle BDP$的周长为$2\sqrt{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2+y_2^2}+2\left|y_2\right|$，

所以$S_{\triangle BDP}=\dfrac{1}{2}\left[2\sqrt{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2+y_2^2}+2\left|y_2\right|\right]r=\dfrac{1}{2}\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)\left|2y_2\right|$，

所以 $r=\dfrac{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)|y_2|}{|y_2|+\sqrt{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2+y_2^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x_2+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{y_2^2}+\dfrac{1}{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2x_2}+\dfrac{1}{\left(x_2+\dfrac{1}{2}\right)^2}}+\dfrac{1}{x_2+\dfrac{1}{2}}}$.

令 $t=x_2+\dfrac{1}{2}$，则 $r=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2t-1}+\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{1}{t}},t>1$，

因为 $y=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2},y=\dfrac{1}{2x-1},y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上均单调递减，

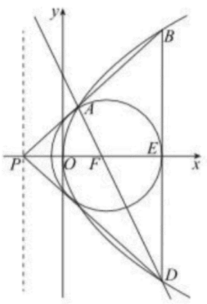
所以 $y=\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

则 $y=\sqrt{\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $r=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2t-1}+\dfrac{1}{t^2}}+\dfrac{1}{t}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $r>\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，

所以 r 的取值范围为 $\left(\sqrt{2}-1,+\infty\right)$.



19.【解析】

（1） $f'(x)=\dfrac{(s-1)x^{s-2}\left(e^x-1\right)-x^{s-1}e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{x^{s-2}\left[(s-1)\left(e^x-1\right)-xe^x\right]}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{x^{s-2}\left[(s-1-x)e^x-(s-1)\right]}{\left(e^x-1\right)^2}$，

令 $\varphi(x)=(s-1-x)e^x-(s-1),1<s\le 2$，

$\varphi'(x)=(s-2-x)e^x$，当 $1<s\le 2$ 时，$\varphi'(x)=(s-2-x)e^x<0$

$\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $\varphi(0)=s-1-(s-1)=0$，

所以，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

（2）①（1）得：$f'(x)=\dfrac{x^{s-2}\left[(s-1-x)e^x-(s-1)\right]}{\left(e^x-1\right)^2}$，

令 $\varphi(x)=(s-1-x)e^x-(s-1),(s>2),\varphi'(x)=(s-2-x)e^x$

令 $\varphi'(x)=0$，可得：$x=s-2$，依题意：$s-2>0$

当 $0<x<s-2$ 时，$\varphi'(x)>0$，当 $x>s-2$ 时，$\varphi'(x)<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,s-2)$ 上单调递增，在 $(s-2,+\infty)$ 上单调递减；

又 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(s-2)>0$，又因为 $\varphi(s-1)=-(s-1)<0$

所以，存在唯一 $x_0\in(s-2,s-1),\varphi(x_0)=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减；

所以，$f(x)$ 存在唯一极大值点 x_0，且 $x_0\in(s-2,s-1)$.

②结论：$\xi(s)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

证明：由（1）知：当 $s>2$ 时，$f(x)$ 存在唯一极大值点，

任意 $s,t\in(2,+\infty)$，且 $s<t$，依题意：$f(x)=\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}$ 的极大值点为 $\xi(s)$，记为 x_1；

$f(x)=\dfrac{x^{t-1}}{e^x-1}$ 的极大值点为 $\xi(t)$，记为 x_2；

则 x_1 为 $\varphi_1(x)=(s-1-x)e^x-(s-1)$ 的零点，

x_2 为 $\varphi_2(x)=(t-1-x)e^x-(t-1)$ 的零点，

则 $\begin{cases}\varphi_1(x_1)=(s-1-x_1)e^{x_1}-(s-1)=0\\ \varphi_2(x_2)=(t-1-x_2)e^{x_2}-(t-1)=0\end{cases}$，

由①知：$x_1\in(s-2,s-1),x_2\in(t-2,t-1)$

由 $\varphi_1(x_1)=(s-1-x_1)e^{x_1}-(s-1)=0$ 得： $e^{x_1}=\dfrac{s-1}{s-1-x_1}$

$$\varphi_2(x_1)=(t-1-x_1)\frac{s-1}{s-1-x_1}-(t-1)=\frac{(t-1)(s-1)-x_1(s-1)-(s-1)(t-1)+(t-1)x_1}{s-1-x_1}$$

$$=\frac{(t-1)x_1-x_1(s-1)}{s-1-x_1}=\frac{(t-s)x_1}{s-1-x_1},$$

由于 $x_1\in(s-2,s-1),s<t$ ，所以 $\varphi_2(x_1)=\dfrac{(t-s)x_1}{s-1-x_1}>0$.

根据①的分析可知， $x_2\in(x1,+\infty),\varphi_2(x_2)=0$ ，即 $x_1<x_2$， 即 $\xi(s)<\xi(t)$

所以 $\xi(s)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.