★开封前注意保密

肇庆市2024届高中毕业班第二次教学质量检测

数　学

本试题共4页，考试时间120分钟，满分150分

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的信息填写清楚、准确，将条形码准确粘贴在条形码粘贴处。
2. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效。
3. 答题时请按要求用笔，保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不得使用涂改液、修正带、刮纸刀。考试结束后，请将本试题及答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z=\frac{z_1}{z_2}$，且 $\bar{z}_1=3-\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{y||y|\leqslant 2,\ y\in\mathbf{N}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

3. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是单位向量，且它们的夹角是60°. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\lambda=$

A. 2　　B. -2　　C. 2或-3　　D. 3或-2

4. 为了研究我国男女性的身高情况，某地区采用分层随机抽样的方式抽取了100万人的样本，其中男性约占51%、女性约占49%，统计计算样本中男性的平均身高为175 cm，女性的平均身高为165 cm，则样本中全体人员的平均身高约为

A. 166 cm　　B. 168 cm　　C. 170 cm　　D. 172 cm

5. 已知 $a=1.01^{3.2}$，$b=0.52^{3.2}$，$c=\log_{0.52}3.2$，则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $c>a>b$　　D. $b>a>c$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是它的前 n 项和，$a_1=2$，$\frac{S_{10}}{10}=11$，则 $\frac{S_{100}}{100}=$

A. 100　　B. 101　　C. 110　　D. 120

7. 已知双曲线 E：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，则过点$(2,\sqrt{5})$与 E 有且只有一个公共点的直线共有

A. 4 条　　B. 3 条　　C. 2 条　　D. 1 条

8. 在$\triangle ABC$ 中，若 $A>B$，则下列结论错误的是

A. $A+\sin A>B+\sin B$

B. $\sin A+\cos B>\sin B+\cos A$

C. $\sin A+\cos A>\sin B+\cos B$

D. $A+\sin B>B+\sin A$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{3}=1$，则

A. 当 $a<0$ 时，曲线 C 表示双曲线

B. 当 $0<a<3$ 时，曲线 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆

C. 当 $a=3$ 时，曲线 C 表示圆

D. 当 $a>3$ 时，曲线 C 表示焦点在 y 轴上的椭圆

10. 若$\triangle ABC$ 的三个内角 A，B，C 的正弦值为 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，则

A. $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ 一定能构成三角形的三条边

B. $\frac{1}{\sin A}$，$\frac{1}{\sin B}$，$\frac{1}{\sin C}$一定能构成三角形的三条边

C. $\sin^2 A$，$\sin^2 B$，$\sin^2 C$ 一定能构成三角形的三条边

D. $\sqrt{\sin A}$，$\sqrt{\sin B}$，$\sqrt{\sin C}$一定能构成三角形的三条边

11. 已知 $\omega\neq 0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\omega x-\frac{5\pi}{12}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right)$上单调递增，则 ω 的可能取值为

A. -1　　B. $\frac{1}{13}$　　C. 2　　D. 4

12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数$f(x)$同时满足①$f(x+1)-f(x)=2x+2$，$x\in\mathbf{R}$；②当 $x\in[0,1]$时，$|f(x)|\leqslant 1$，则

A. $f(0)=-1$

B. $f(x)$为偶函数

C. 存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得$f(n)>2\,023n$

D. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$|f(x)|<x^2+|x|+3$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^6$ 的展开式中，x^2 的系数为________.

14. 抛物线 $y=px^2$ 的焦点坐标为$(0,2)$，则 p 的值为________.

15. 小明去书店买了 5 本参考书，其中有 2 本数学，2 本物理，1 本化学. 小明从中随机抽取 2 本，若 2 本中有 1 本是数学，则另 1 本是物理或化学的概率是______.

16. 在四面体 $P-ABC$ 中，$BP\perp PC$，$\angle BAC=60°$，若 $BC=2$，则四面体 $P-ABC$ 体积的最大值是________，它的外接球表面积的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=2^n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{2n}+1$，记 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1)是否存在 λ，使 $\{b_n-\lambda\}$ 为等比数列？若存在，求出所有满足条件的 λ；若不存在，请说明理由；

(2)求 S_n.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$AB=2$，$AD=1$，$AC=4$，求：

(1) BD 的长；

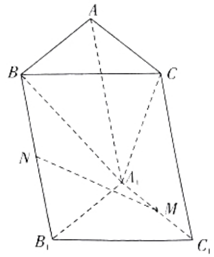
(2) $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC$，$AA_1=A_1C$.

(1)若 M，N 分别为 A_1C_1，BB_1 的中点，证明：$MN /\!/$ 平面 A_1BC；

(2)当直线 A_1B 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ 时，求平面 A_1BC 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.



20. (12 分)

已知函数$f(x)=\ln x-m+\frac{m}{x}(m\in\mathbf{R})$.

(1)求$f(x)$的极值;

(2)对任意$x\in(0,1)$,不等式$f(x)>-\frac{1}{e}$恒成立,求m的取值范围.

21. (12 分)

已知F_1、F_2分别是椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,点$P(x_0,y_0)$在$C$上.

(1)证明:$|PF_2|=a-ex_0$(其中e为C的离心率);

(2)当$a=5$,$b=\sqrt{15}$时,是否存在过点F_2的直线l与C交于$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点,其中$x_1>0$,$x_2<0$,使得$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{3}{|AB|}$成立?若存在,求出直线$l$的方程;若不存在,请说明理由.

22. (12 分)

某市12月的天气情况有晴天、下雨、阴天3种,第2天的天气情况只取决于第1天的天气情况,而与之前的无关. 若第1天为晴天,则第2天下雨的概率为$\frac{1}{4}$,阴天的概率为$\frac{1}{4}$;若第1天为下雨,则第2天晴天的概率为$\frac{1}{4}$,阴天的概率为$\frac{3}{8}$;若第1天为阴天,则第2天晴天的概率为$\frac{1}{4}$,下雨的概率为$\frac{1}{3}$. 已知该市12月第1天的天气情况为下雨.

(1)求该市12月第3天的天气情况为晴天的概率;

(2)记a_n,b_n,c_n分别为该市12月第$n(n\in\mathbf{N})$天的天气情况为晴天、下雨和阴天的概率,证明:$\{a_{n+1}-a_n\}$为等比数列,并求出a_n.