

2024 届名校名师测评卷(四)

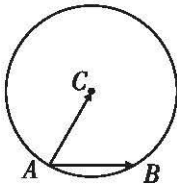
数 学

命题人：一六八数学高三命题组

考生注意：

1. 试卷分值：150 分，考试时间：120 分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答案区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 所有答案均要答在答题卡上，否则无效。考试结束后只交答题卡。

一、单选题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

1. 设集合 $A = \{-1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \left\{x \in \mathbf{N}^* \mid \frac{x+1}{x-5} \leq 0\right\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $\{2, 3, 5\}$ B. $\{-1, 2, 3, 5\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{2, 3\}$
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是无穷项等比数列，公比为 q ，则“ $q > 1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 单调递增”的 (\quad)
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件
3. 已知角 α 为钝角，且角 $\theta (0 < \theta < 2\pi)$ 终边上有一点 $P(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ ，则角 $\theta = (\quad)$
 A. $\pi + \alpha$ B. $\frac{\pi}{2} + \alpha$ C. $2\pi - \alpha$ D. $\frac{3\pi}{2} - \alpha$
4. 如图， $\odot C$ 半径为 3， A, B 为圆上两点，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$ ，则 $S_{\triangle ABC} = (\quad)$
 A. 4 B. 2
 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$

5. 已知偶函数 $f(x)$ 满足对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(3-x) = f(-1+x)$ ，且当 $0 \leq x \leq 1$ 时有 $f(x) = x^2$ ，则方程 $168 \cdot f(x) - x = 0$ 的解的个数为 (\quad)
 A. 167 B. 168 C. 169 D. 170
6. 任取一个正数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2。反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ 。这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”等)。如取正整数 $m = 6$ ，根据上述运

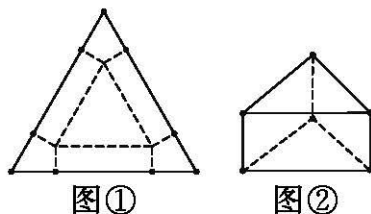
算法则得出 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 共需经过 8 个步骤变成 1 (简称为 8 步“雹程”). 现给出冰雹猜想递推关系如下: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = m$ (m 为正整数), $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$ 若 $a_8 = 1$, 则 m 的取值可能为 ()

A. $\{2, 3, 16, 20, 128\}$ B. $\{2, 3, 16, 20, 21, 128\}$
C. $\{2, 16, 20, 128\}$ D. $\{2, 16, 20, 21, 128\}$

7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , S 为 $\triangle ABC$ 的面积, 且 $2S = a^2 - (b-c)^2$, 则 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的取值范围为 ()

A. $(\frac{3}{5}, \frac{5}{3})$ B. $(0, \frac{3}{5})$ C. $(0, \frac{5}{3})$ D. $(\frac{3}{5}, +\infty)$

8. 如图, 在边长为 a 的正三角形的三个角处各剪去一个四边形. 这个四边形是由两个全等的直角三角形组成的, 并且这三个四边形也全等, 如图①. 若用剩下的部分折成一个无盖的正三棱柱形容器, 如图②. 则这个容器的容积的最大值为 ()



A. $\frac{a^3}{27}$ B. $\frac{a^3}{36}$ C. $\frac{a^3}{54}$ D. $\frac{a^3}{72}$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $\triangle ABC$ 中, 其内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 下列命题正确的有 ()

- A. 若 $A > B$, 则 $\cos A < \cos B$
- B. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$
- C. 若 $\sin 2A = \sin 2B$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形
- D. 若 $\cos 2A = \cos 2B$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形

10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 前 n 项和为 S_n , 则下列命题是真命题的为 ()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列
- B. 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列
- C. S_n 一定有最小值
- D. 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列

11. 设 P 为多面体 M 的一个顶点, 定义多面体 M 在点 P 处的离散曲率为

$$1 - \frac{1}{2\pi} (\angle Q_1 P Q_2 + \angle Q_2 P Q_3 + \dots + \angle Q_{k-1} P Q_k + \angle Q_k P Q_1),$$

其中 $Q_i (i = 1, 2, \dots, k, k \geq 3)$ 为多面体 M 的所有与点 P 相邻的顶点, 且平面 $Q_1 P Q_2$, 平面

Q_2PQ_3, \dots , 平面 $Q_{k-1}PQ_k$ 和平面 Q_kPQ_{k+1} 为多面体 M 的所有以 P 为公共点的面. 已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $AA_1 = AB$, 则下列说法正确的是()

- A. 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在其各顶点处的离散曲率都相等
- B. 若 $AC=BD$, 则四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{1}{2}$
- C. 若四面体 A_1ABD 在点 A_1 处的离散曲率为 $\frac{7}{12}$, 则 $AC_1 \perp$ 平面 A_1BD
- D. 若四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 在顶点 A 处的离散曲率为 $\frac{1}{3}$, 则直线 BC_1 与

平面 ACC_1 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b$, 其中实数 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 则下列结论正确的是()

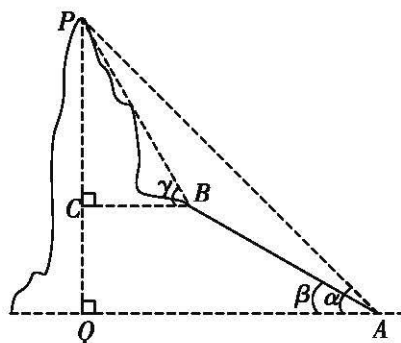
- A. $f(x)$ 必有两个极值点
- B. 当 $a < 0$, $y = f(x)$ 有且仅有 3 个零点时, b 的范围是 $(4a, 0)$
- C. 当 $b = 2a$ 时, 点 $(1, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
- D. 当 $a > 0$, $5a < b < 6a$ 时, 过点 $A(2, a)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 的 2 条切线

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知向量 $a = (-1, 3)$, $b = (1, 2)$, $c = (2, m)$, 若 $b - c$ 与 $a - c$ 共线, 则 $m =$ _____.

14. 已知函数 $y = \sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, 0 < \theta < \pi$) 为偶函数, 其图象与直线 $y = 1$ 的交点的横坐标为 x_1, x_2 . 若 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 2, 则 $\sin(\omega + \theta)$ 的值为 _____.

15. 如图, 在山脚 A 处测得山顶 P 处的仰角为 $\frac{\pi}{4}$, 沿着倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的斜坡向上走 200 米后到达山坡上的 B 处, 在 B 处测得山顶 P 的仰角为 $\frac{\pi}{3}$. 则山高 (PQ) 为 _____ 米.



16. 已知 $x^2 - xy + y^2 = 2$, 则 $x^2 - y^2$ 的最大值为 _____.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)已知函数 $f(x) = 4\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

(2)若不等式 $m > f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有解,求 m 的取值范围.

18. (12 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $S_5 = 25a_1, a_{2n} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = (-1)^n \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, a=3, 2c-b=2a\cos B$.

(1) 求 A ;

(2) M 为 $\triangle ABC$ 外心, AM 的延长线交 BC 于点 D , 且 $MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (12分) 已知函数 $f(x)=xe^{x+1}$.

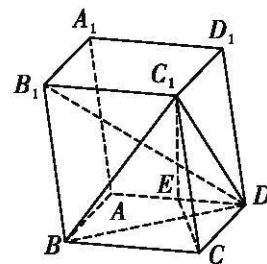
(1) 求 $f(x)$ 在 origin 处的切线方程;

(2) 当 $0\leq x\leq 2\pi$ 时, 不等式 $f(x-1)-ax+1\geq 2\sin x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分) 如图, 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $AB=1, BC=4, \angle ABC=60^\circ, C_1C \perp CD, E$ 为 AD 的中点, 且 $C_1E \perp EC$.

(1) 过点 C 作四棱柱的截面使其与面 $ABCD$ 垂直, 并予以证明;

(2) 若平面 BDC_1 与平面 ADD_1A_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求三棱锥 B_1-BDC_1 的体积.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{e^x}$ 和 $g(x) = \frac{\ln x}{ax}$ 有相同的最大值.

(1) 求 a 的值;

(2) 已知直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有四个不同的交点, 从左到右四个交点的横坐标分别设为 x_1, x_2, x_3, x_4 , 证明: $x_1 \cdot x_4 = x_2 \cdot x_3$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

