

2024 年全国高考·仿真模拟卷(六)

数 学

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡的相应位置。
3. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题卷上无效。
4. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
5. 考试结束后,将本试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集  $U=\mathbf{R}$ ,集合  $A=\{x|1\leq 2^x\leq 4\}$ , $B=\{x|y=\sqrt{-x^2+3x}\}$ ,则  $(\complement_U A)\cap B=$   
A.  $[0,3]$       B.  $[2,3]$       C.  $(-\infty,0]$       D.  $(2,3]$
2. 已知复数  $z$  在复平面内对应的点为  $Z(1,2)$ ,复数  $z$  的共轭复数为  $\bar{z}$ ,则  $\frac{\bar{z}}{1+i}=$   
A.  $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$       B.  $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$       C.  $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$       D.  $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$
3. 已知  $c=3b-2a$ ,若  $|a|=3$ , $|b|=\sqrt{2}$ , $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ ,则  $|c|=$   
A. 4      B.  $2\sqrt{3}$       C.  $3\sqrt{2}$       D. 6
4. 已知数列  $\{a_n\}$  是等比数列,若  $a_5-a_3=12$ , $a_6-a_4=24$ ,则  $a_{2^{024}}=$   
A.  $2^{2^{023}}-1$       B.  $2^{2^{023}}$       C.  $2^{2^{024}}-1$       D.  $2^{2^{024}}$
5. 已知函数  $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$  ( $\omega>0$ , $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的最小正周期  $T=\pi$ ,若  $(\frac{\pi}{3},0)$  是函数  $f(x)$  图象的一个对称中心,则函数  $f(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$  上的值域是  
A.  $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$       B.  $(-1,2]$   
C.  $(-\sqrt{3},2]$       D.  $[-1,2]$
6. 某班有 10 名校秋季运动会志愿者,其中组织部有 4 人,宣传部有 4 人,信息技术部有 2 人,现从这 10 人中随机选取 3 人,事件 A:“这 3 人来自不同部门”,事件 B:“这 3 人中至少有 1 人来自宣传部”,则  $P(A|B)=$   
A.  $\frac{5}{9}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{17}{25}$       D.  $\frac{8}{25}$
7. 已知函数  $f(x)=2x^2-x+\ln x$  在  $[1,+\infty)$  上单调递增,则实数  $a$  的最小值为  
A. -2      B. -3      C. -1      D. 0

座位号  
姓名  
考号  
班级  
学校

要 答 题 内 线 封 密

8. 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AA_1 : AB = 2 : \sqrt{3}$ , 若正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的外接球的表面积为  $12\pi$ , 则正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的体积为

- A.  $\frac{27\sqrt{2}}{4}$       B.  $\frac{27\sqrt{2}}{8}$       C.  $\frac{9\sqrt{2}}{8}$       D.  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $a > b > 0$ , 则下列结论正确的是

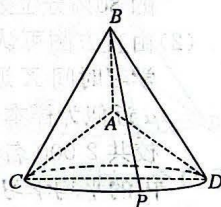
- A.  $(\frac{1}{3})^a < (\frac{1}{3})^b < (\frac{1}{4})^b$       B. 若  $c < 0$ , 则  $\frac{b-c}{a-c} > \frac{b}{a}$   
C.  $\frac{a+2}{b^2} > \frac{b+2}{a^2}$       D. 若  $b > c > 0$ , 则  $\frac{b}{a-b} > \frac{c}{a-c}$

10. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = 2^x + 2x$ , 则

- A. 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -2^{-x} - 2x$   
B.  $f(-2) = 0$   
C.  $f(x)$  是增函数  
D. 曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = x$  有且只有一个交点

11. 如图,  $\triangle BCD$  是圆锥的一个轴截面, 点  $A$  是圆锥的对称轴上一点, 且  $AB = AC = 2$ ,  $P$  是圆锥底面圆上一点, 若圆锥的母线长为  $2\sqrt{3}$ , 则

- A. 直线  $AB$  与直线  $PB$  所成角为  $30^\circ$   
B. 直线  $AC$  与直线  $PB$  所成角的取值范围为  $[60^\circ, 90^\circ]$   
C. 若  $\widehat{CP} = 2\widehat{PD}$ , 则二面角  $P-BC-D$  的正弦值为  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$   
D.  $\triangle ABC$  绕直线  $AB$  旋转  $360^\circ$  所得旋转体的表面积为  $6\pi$



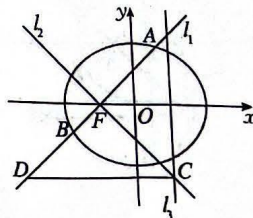
12. 已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 点  $A(a, 2)$  在  $C$  上, 且  $|AF| = 3$ , 直线  $l$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 且  $PQ$  中点的纵坐标为 2, 则下列说法正确的是

- A.  $p = 1$   
B. 直线  $y = x - 1$  与  $C$  相切  
C.  $|PQ|$  的最大值为 6  
D. 若直线  $l$  经过点  $F$ , 且直线  $OP$  与  $OQ$  分别交直线  $y = x - 2$  于  $M, N$  两点,  $|MN| = \frac{16}{7}$ , 则

直线  $l$  的方程为  $x + y - 1 = 0$  或  $31x + 17y - 17 = 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13.  $(x+2)(2x-1)^6$  的展开式中  $x^2$  的系数是 \_\_\_\_\_。  
14. 若角  $\theta$  的始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 终边经过点  $(-3, 1)$ , 则  $\tan \theta \cdot \cos 2\theta =$  \_\_\_\_\_。  
15. 已知点  $M(m, m) (m > 0)$  是曲线  $C: x^2 + y^2 + 2x - 10y + 24 = 0$  外一点, 过点  $M$  作直线  $MA, MB$  与曲线  $C$  相切于  $A, B$  两点, 若直线  $MA, MB$  关于直线  $OM$  对称 (其中  $O$  是坐标原点), 则  $|AB| =$  \_\_\_\_\_。  
16. 如图, 过椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左焦点  $F$  作直线  $l_1, l_2$  ( $l_1$  和  $l_2$  与  $x$  轴不垂直), 且  $l_1 \perp l_2$ , 记  $l_1$  与椭圆的交点为  $A, B$ ,  $l_2$  与直线  $l_3: x = 1$  的交点为  $C, D$  是直线  $l_1$  上一点, 若  $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AD|}{|BD|}$ , 则  $|CD|$  的最小值为 \_\_\_\_\_。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $b=2, c=4, C=\frac{\pi}{3}$ 。

(1) 求  $\triangle ABC$  的面积；

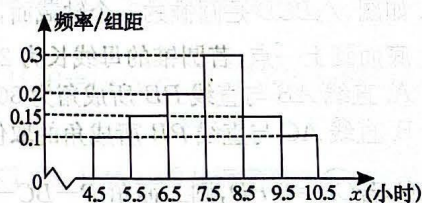
(2) 证明： $\triangle ABC$  是钝角三角形。

18. (本小题满分 12 分)

“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”对于学生来讲，暑假正是弯道超车的好机会，但对于老师来讲，不怕学生是学霸，就怕学生放暑假。杜老师为了解学生暑假的自主学习情况，随机调研了本校 200 名学生最近 15 日内的平均学习时间  $x$  (单位：小时)，并将所得数据整理成如下频率分布直方图。

(1) 求这 200 名学生最近 15 日内的平均学习时间的 80% 分位数 (结果精确到 0.01)；

(2) 由直方图可认为本校学生最近 15 日内的平均学习时间  $X$  近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  近似为样本平均数， $\sigma^2$  近似为样本方差。若全校共 2 000 名学生，试估计全校学生最近 15 日内的平均学习时间超过 8.98 小时的人数。(同一组的数据用该组区间的中点值作代表，方差结果精确到 0.01)



附：①  $\sqrt{2.05} \approx 1.43$ ；② 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ， $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ 。

19. (本小题满分 12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_1=2, S_n = \frac{1}{2}(n + \frac{3}{2})^2 + m, m \in \mathbf{R}$ 。

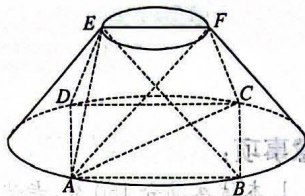
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式和  $m$  的值；

(2) 已知  $b_n = a_n \cdot 3^{n-1}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

20. (本小题满分 12 分)

如图,圆台的上、下底面的半径分别为 1 和  $2\sqrt{2}$ ,  $EF$  是上底面圆的一条直径,  $AB$  和  $CD$  是下底面圆的两条弦,且四边形  $ABCD$  是正方形,  $AB \parallel CD \parallel EF$ ,  $AE = \sqrt{14}$ .

- (1)求点  $B$  到平面  $CDEF$  的距离;  
(2)求直线  $BE$  与平面  $ACF$  所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且  $|F_1F_2| = 2\sqrt{6}$ , 其中一条渐近线与斜率为  $-\sqrt{5}$  的直线垂直.

- (1)求双曲线  $\Gamma$  的标准方程;  
(2)已知直线  $l$  过  $\Gamma$  的右焦点, 且斜率为 1, 交  $\Gamma$  于  $M, N$  两点, 记  $O$  为坐标原点, 试判断在  $\Gamma$  上是否存在异于  $M, N$  两点的点  $P$ , 使得  $\vec{OP} = \lambda \vec{OM} + \vec{ON}$ ? 若存在, 求  $\lambda$  的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^{-2} \ln x + 1$ .

- (1)求函数  $f(x)$  的单调区间与零点个数;  
(2)若函数  $g(x) = e^x - a(x-1)^2 \cdot [f(x-1) - 1] (a > 0)$  的导函数在区间  $(1, 1 + e^{-a})$  上有且只有一个零点, 证明:  $\frac{a(a+1)}{2a+1} < \frac{1}{a}$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

