

2023—2024 学年度第一学期高三质量检测

数学试题

2024.01

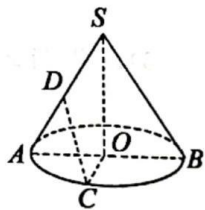
本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考试号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i) - 1 + 2i = 0$, 则在复平面内 z 对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 3x < 0\}$, 集合 $B = \{y \mid y = \log_2 x, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. \emptyset
3. “ $a=1$ ”是“直线 $l_1: ax - y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: x + a^2y - 1 = 0$ 垂直”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为椭圆 E 上位于第一象限内的一点, 若 $|PF_1| = 3|PF_2|$, $|OP| = |OF_2|$ (O 为坐标原点), 则椭圆 E 的离心率为
A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$
5. 如图, 已知圆锥 SO 的母线长为 $2\sqrt{6}$, AB 是底面圆 O 的直径, 且 $AB=4$, 点 C 是弧 \widehat{AB} 的中点, D 是 SA 的中点, 则异面直线 SO 与 CD 所成角的大小为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$



数学试题 第 1 页 (共 4 页)

6. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 且函数 $y=f(x-1)+2$ 是奇函数, 则函数 $y=g(x)$ 图象的对称中心为

- A. (1, 2) B. (-1, 2) C. (1, -2) D. (-1, -2)

7. 若 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -2$, 则 $\frac{\sin\alpha(1-\sin 2\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} =$

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $-\frac{6}{5}$

8. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 $2\sqrt{2}$, E 为棱 PB 的中点, 若 $PA \perp CE$, 则三棱锥 $P-ACE$ 的外接球的表面积是

- A. $\frac{9\pi}{2}$ B. 9π C. $\frac{81\pi}{4}$ D. 36π

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列命题中正确的是

- A. 若 $ac^2 > bc^2$, 则 $a > b$
 B. 若 $a > b$ 且 $c > d$, 则 $a - c > b - d$
 C. 若 $a > 0, b > 0$, 且 $a + 2b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $3 + 2\sqrt{2}$
 D. 若 $a > 0$, 则 $4a + \frac{9}{a+2}$ 的最小值为 4

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期为 π , 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 对称, 则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{5\pi}{12})$ 内单调递减
 C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 内有恰有两个零点
 D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可以得到函数 $g(x) = \cos 2x$ 的图象

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = 1, a_n a_{n+1} = 2^n, b_n = \frac{1}{\log_2 a_{2n}}$, 数列 $\{b_n \cdot b_{n+1}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则下列说法正确的是

- A. $a_{2n-1} = 2^{n-1}$ B. $a_{2n} = 2^{n+1}$ C. $S_{2024} = 3 \cdot 2^{1012} - 3$ D. $T_n < 1$

数学试题 第 2 页 (共 4 页)

12. 已知双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过左焦点 F_1 的直线与双曲线 E 的左支相交于 A, B 两点 (A 在第二象限), 点 C 与 B 关于坐标原点对称, 点 M 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$, 则下列结论正确的是

- A. 记直线 AB, AC 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{3}$
- B. 若 $\overrightarrow{CF_1} \cdot \overrightarrow{BF_1} = 0$, 则 $S_{\triangle CBF_1} = 3$
- C. $|MC| + |CF_1|$ 的最小值为 6
- D. $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2}$ 的取值范围是 $(-\frac{3}{4}, +\infty)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知指数函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(3, 27)$, 则 $f(2\log_3 2) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = 1, b = (1, 2), a \perp (a - 2b)$, 则向量 a, b 夹角的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

15. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 过点 $P(3, 1)$ 作两条与圆 O 相切的直线, 切点分别为 A, B , 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 若函数 $f(x) = x^2 + ax(e^x - 1) - a^2 e^x$ 恰有两个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \cos C + c \cos B + \frac{a}{2 \cos A} = 0$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, 求 a 的最小值.

18. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为公差大于 0 的等差数列, 其前 n 项和为 $S_n, S_5 = 15, a_2 \cdot a_4 = 8$.

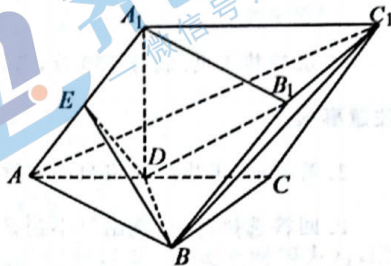
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = 2^{a_n} \cdot \cos \frac{a_n \pi}{2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 T_{100} .

19. (本题满分 12 分)

如图, 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各棱长均为 2, D, E 分别是线段 AC, AA_1 的中点, $A_1D \perp$ 平面 ABC .

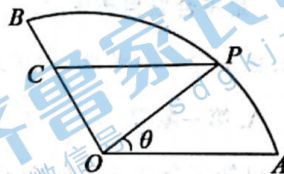
- (1) 求证: 平面 $ABC_1 \perp$ 平面 BDE ;
- (2) 求平面 B_1BD 与平面 BDE 夹角的大小.



20. (本题满分 12 分)

如图, 点 P 是圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$, 半径为 1 的扇形圆弧 \widehat{AB} 上的一动点 (与 A, B 不重合), C 在线段 OB 上且 $CP \parallel OA$, 记 $\angle POA = \theta$, 线段 OC, CP 及圆弧 \widehat{PA} 的长度之和为 $f(\theta)$.

- (1) 求函数 $f(\theta)$ 关于 θ 的解析式;
- (2) 求 θ 为何值时, 函数 $f(\theta)$ 取得最大值.



21. (本题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点到 C 的准线的距离为 1.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 若经过定点 $D(0, 4)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, M 为弦 AB 的中点, 过 M 作与 x 轴垂直的直线与抛物线 C 交于点 N , 当 $AN \perp BN$ 时, 求直线 l 的方程.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 若实数 m, n 满足 $m < n < 0$, 证明: $\frac{me^n - ne^m}{e^m - e^n} > 1$;
- (3) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) < \frac{4e^{x-2}}{x^2}$.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注齐鲁家长圈微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索