沧衡名校联盟高三年级 2023—2024 学年上学期期末联考

数学 · 答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B　　2. D　　3. A　　4. C　　5. B　　6. C

7. D　　8. C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BD　　10. AC　　11. BCD　　12. ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{21}{11}$　　14. 2

15. $2\sqrt{2}$　　16. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **解析**　（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $\begin{cases} a_3=7, \\ a_5+a_6=29, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a_1+2d=7, \\ 2a_1+9d=29, \end{cases}$ ……（2 分）

解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=3, \end{cases}$ ……（4 分）

所以 $a_n=1+3(n-1)=3n-2$. ……（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $a_1=1, a_2=4$,

则 $a_1+b_1=1, a_2+b_2=2$. ……（6 分）

因为 $\{b_n+a_n\}$ 是等比数列，所以公比为 $\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}=\frac{2}{1}=2$, ……（7 分）

所以 $b_n+a_n=2^{n-1}$, ……（8 分）

所以 $b_n=2^{n-1}-(3n-2)=2^{n-1}+2-3n$. ……（9 分）

所以 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+2n-\frac{3n(n+1)}{2}=2^n-1-\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. ……（10 分）

18. **解析**　记内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

（Ⅰ）因为 $\sin B\sin C+\sin^2 C=\cos^2 B-\cos^2 A$,

所以 $\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin^2 B$, ……（1 分）

由正弦定理得 $bc+c^2=a^2-b^2$, ……（3 分）

故由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$, ……（5 分）

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……（6 分）

（Ⅱ）因为 AD 平分 $\angle BAC$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$， ………………………………………………………………（7 分）

因为 $AB=2AC$，所以 $BD=2CD$，所以 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABC}$， ……………………………………………（9 分）

所以 $\dfrac{1}{2}c\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}$， ……………………………………………………（10 分）

即 $\dfrac{1}{2}\times4\times AD\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\sin\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $AD=\dfrac{4}{3}$. ……………………………………………………………………………………………（12 分）

19. **解析** （Ⅰ）如图，连接 AC.

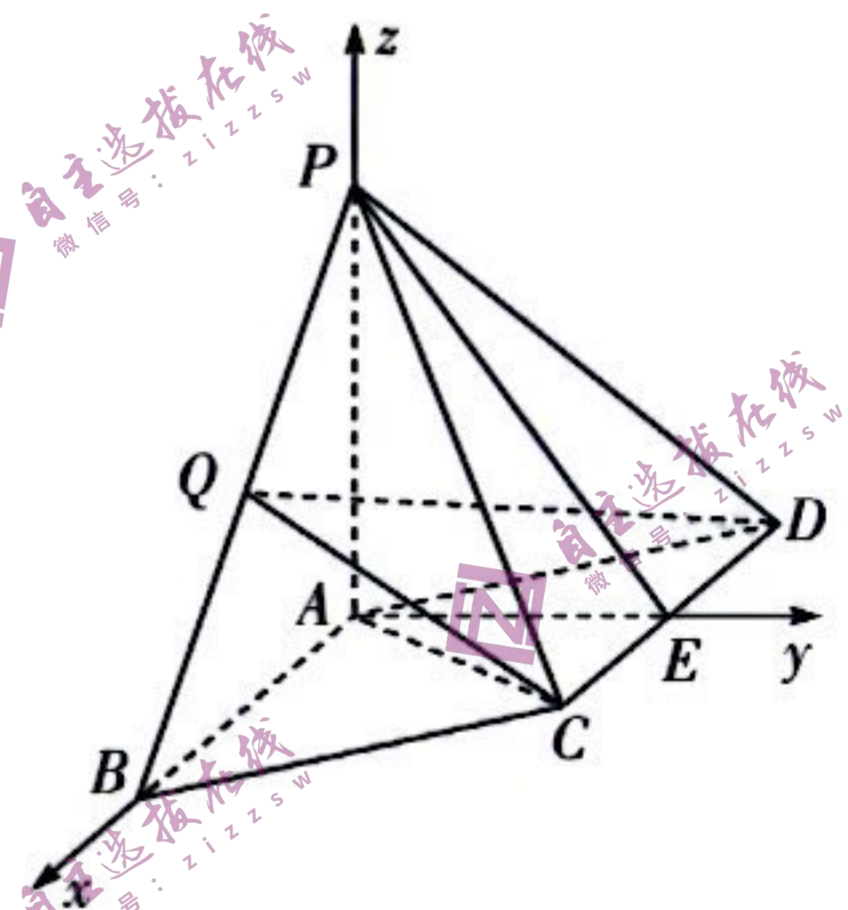
由已知可得 $\triangle ACD$ 为正三角形，又 E 为 CD 的中点，所以 $CD\perp AE$. ……………………………（1 分）

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp PA$. ………………………………………………………………（2 分）

因为 $PA\cap AE=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAE， ……………………………………………………………（4 分）

因为 $CD\subset$ 平面 QCD，所以平面 $QCD\perp$ 平面 PAE. …………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由已知得 $\angle BAE=\dfrac{\pi}{2}$，所以 AB,AE,AP 两两互相垂直，以 A 为坐标原点，AB,AE,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图. ……………………………………………………………………………………（6 分）



设 $AD=2$，则 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$E(0,\sqrt{3},0)$，$Q(1,0,1)$，

$\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{QE}=(-1,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PE}=(0,\sqrt{3},-2)$. ……………………………（8 分）

设平面 QCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=x=0,\\ \overrightarrow{QE}\cdot\boldsymbol{n}=-x+\sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$. ……………………………………（10 分）

设直线 PE 与平面 QCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. ……………………………………（12 分）

20. **解析** （Ⅰ）由题意，前 4 次闪光的顺序为“红黄蓝红”或“红蓝黄红”， ……………………………（2 分）

所以 $P=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设事件 A_n 表示“第 n 次闪光为红光”，事件 B_n 表示“第 n 次闪光为黄光”，事件 C_n 表示“第 n 次闪光为蓝

光”，且 $P(A_n)=f(n)$，$P(B_n)=g(n)$，则 $P(C_n)=1-f(n)-g(n)$，

由题意知 $f(1)=P(A_1)=1$，…………（6分）

当 $n\geqslant 2$ 时，$P(A_n)=P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})+P(C_{n-1})P(A_n|C_{n-1})$，…………（7分）

即 $f(n)=\frac{1}{4}g(n-1)+\frac{1}{4}[1-f(n-1)-g(n-1)]$，整理得 $f(n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f(n-1)$，…………（8分）

所以 $f(n)-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left[f(n-1)-\frac{1}{5}\right]$，

所以 $\left\{f(n)-\frac{1}{5}\right\}$ 是以 $f(1)-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ 为首项，$-\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，…………（10分）

所以 $f(n)-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，

故 $P(A_n)=f(n)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$，即第 n 次闪红光的概率为 $\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$. …………（12分）

21. 解析　（Ⅰ）因为 E 是关于 x 轴和 y 轴均对称的等轴双曲线，故可设其方程为 $x^2-y^2=\lambda$，…………（1分）

又 E 经过点 $(4,2\sqrt{3})$，所以 $\lambda=4^2-(2\sqrt{3})^2=4$，…………（3分）

所以 E 的方程为 $x^2-y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. …………（4分）

（Ⅱ）因为 $A(m,n)$ 在 E 上，所以 $m^2-n^2=4$. …………（5分）

联立方程得 $\begin{cases}x^2-y^2=4,\\ mx-ny=8,\end{cases}$ 消去 x 整理可得 $(m^2-n^2)y^2-16ny+4m^2-64=0$，

将 $m^2=4+n^2$ 代入，可得 $y^2-4ny+n^2-12=0$. …………（6分）

所以 $\Delta=16n^2-4(n^2-12)=12n^2+48>0$.

设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4n$，$y_1y_2=n^2-12$，…………（7分）

所以 $|BC|=\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}|y_2-y_1|=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{4+n^2}}\sqrt{16n^2-4(n^2-12)}$

$=\sqrt{12(m^2+n^2)}$. …………（9分）

点 A 到直线 BC 的距离为 $d=\frac{|m^2-n^2-8|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}$，…………（10分）

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}|BC|d=\frac{1}{2}\times\sqrt{12(m^2+n^2)}\times\frac{4}{\sqrt{m^2+n^2}}=4\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为定值 $4\sqrt{3}$. …………（12分）

22. 解析　（Ⅰ）$f'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$，…………（1分）

由 $f'(x)=0$，得 $\cos\frac{\pi x}{2}=\frac{2}{\pi}$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$\frac{\pi x}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{\pi x}{2}=\pm\theta$，即 $x=\pm\frac{2\theta}{\pi}$，…………（2分）

当 $-\frac{2\theta}{\pi}<x<\frac{2\theta}{\pi}$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<-\frac{2\theta}{\pi}$ 或 $\frac{2\theta}{\pi}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，…………（3分）

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内的单调递减区间为 $\left(-\frac{2\theta}{\pi},\frac{2\theta}{\pi}\right)$. …………（4分）

（Ⅱ）依题意，$g(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}-a\ln|x|$，定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(ⅰ)当 $x<0$ 时,有 $g(-1)=0$. …………………………………………………………………………………… (5 分)

当 $x<-1$ 时,$-\sin\frac{\pi x}{2}\leqslant 1$,$-a\ln|x|<0$,所以 $g(x)<0$;

当 $-1<x<0$ 时,由(Ⅰ)知 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{2\theta}{\pi}\right)$ 单调递增,在 $\left(-\frac{2\theta}{\pi},0\right)$ 单调递减,

又 $f(-1)=f(0)=0$,所以 $f(x)=x-\sin\frac{\pi x}{2}>0$,又 $-a\ln|x|>0$,所以 $g(x)>0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 总有唯一的零点 -1. ……………………………………………………………… (7 分)

(ⅱ)当 $x>0$ 时,有 $g(1)=0$,$g'(x)=1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{a}{x}$,$g'(1)=1-a$.

若 $a=1$,有 $g(x)=x-\ln x-\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant 1-\sin\frac{\pi x}{2}\geqslant 0$,当且仅当 $x=1$ 时两个不等号中的等号同时成立,

可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有 1 个零点 1,符合题意. …………………………………………………… (8 分)

若 $a>1$,有 $g'(x)$ 在 $(1,2)$ 单调递增,$g'(2)=1+\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}$.

①若 $g'(2)\leqslant 0$,则当 $x\in(1,2)$ 时,有 $g'(x)<0$;

②若 $g'(2)>0$,又 $g'(1)<0$,则可知 $\exists x_1\in(1,2)$,使得 $g'(x_1)=0$.

由①②,可知 $g(x)$ 在 $(1,x_1)$ 单调递减,所以 $g(x_1)<g(1)=0$,

又当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$,所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 至少有 1 个零点,

则可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 至少有 2 个零点,不符合题意. ……………………………………………… (9 分)

若 $0<a<1$,有 $g'(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,又 $g'(1)>0$,$g'\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-2a<0$,

则可知 $\exists x_2\in(0,1)$,使得 $g'(x_2)=0$,且 $g(x)$ 在 $(x_2,1)$ 单调递增,则有 $g(x_2)<g(1)=0$,

又当 $x\to 0$ 时,$g(x)\to+\infty$,所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 至少有 1 个零点,

则可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 至少有 2 个零点,不符合题意. ……………………………………………… (11 分)

综上可知,$a=1$. …………………………………………………………………………………………… (12 分)