高2024届学业质量调研抽测（第一次）

数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1～4.：**CCDC**；　5～8. **BADA**

二、选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. **ABD**；　10.**BCD**；11. **AD**；　12. **ACD**

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{15}{4}$；　14. $\sqrt{3}$；　15. $\sqrt{3}-1$；　16. $\frac{4^n-1}{3}, -48$

四、解答题：

17. 解：（Ⅰ）在ΔBCD中，$\because \sin\angle BCD=\frac{\sqrt{15}}{4}$，且为钝角，$\therefore \cos\angle BCD=\frac{1}{4}$，　…1分

$\therefore BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=16$ 得 $BD=4$. ………………3分

在ΔBCD中，$\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\frac{7}{8}$ ……………………………5分

（Ⅱ）在梯形$ABCD$中，$\because AB//CD$ $\therefore \angle ABD=\angle BDC$

$\therefore \cos\angle ABD=\cos\angle BDC=\frac{7}{8}$

在ΔABD中，$\because E$为AD边上的中点，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ……………………………………………………………7分

$\therefore (\overrightarrow{BE})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BD}\right)^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|\right)^2+\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BD}\right|\right)^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\angle ABD=\frac{17}{2}$. …………9 分

$\therefore BE=\frac{\sqrt{34}}{2}$ ……………………………………………………………………10 分

18．解：（Ⅰ）设 $S_n=n^2+bn$ $\because S_4=S_1\cdot S_2$，

$\therefore 16+4b=(1+b)(4+2b)$，化简得 $b^2+b-6=0$，

解得 $b=2$ 或 $b=-3$ ……………………………………………………………2 分

当 $b=2$ 时，$S_n=n^2+2n$，又 $a_1=S_1=3$，满足 $a_1>0$ $\therefore a_n=2n+1$

当 $b=-3$，$S_n=n^2-3n$，又 $a_1=S_1=-2$，不满足 $a_1>0$，$\therefore$ 舍去

$\therefore a_n=2n+1$ ……………………………………………………………………5 分

法二：$S_n=n\cdot a_1+n(n-1)$，$\because S_4=S_1\cdot S_2$，

$\therefore 4a_1+12=a_1\cdot(2a_1+2)$，解得 $a_1=3$ 或 $a_1=-2$

$\because a_1>0$，$\therefore a_1=3$ ……………………………………………………………4 分

$\therefore a_n=2n+1$ ……………………………………………………………………5 分

（Ⅱ）$b_n=\cos(n\pi)\cdot\frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\cos(n\pi)\cdot(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3})$ …………………7 分

当 n 为偶数时，$T_n=-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})-(\frac{1}{7}+\frac{1}{9})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3})$

$=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$ ……………………………………………………………9 分

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n-1}+b_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}$

$=-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$，$(n\geq 3)$

经检验，$n=1$时，满足$T_n=-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$ ……11分

综上，当n为偶数时，$T_n=\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$；当$n$为奇数时，$T_n=-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{3}$…12分

19. 解：（Ⅰ）令$u=\ln y=\ln a\cdot e^{bx}=bx+\ln a$，即$u=bx+\ln a$，

$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.50$，$\bar{u}=\frac{\sum_{i=1}^{6}u_i}{6}=\frac{20.88}{6}=3.48$ ……2分

$\sum_{i=1}^{6}x_iu_i-n\overline{x}\overline{u}=80.58-6\times3.5\times3.48=7.50$，

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2-n\overline{x}^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2-6\times3.50^2=17.50$

$\therefore b=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iu_i-6\overline{x}\overline{u}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\overline{x}^2}=\frac{7.50}{17.50}\approx0.43$， ……4分

$\therefore \ln a=3.48-0.43\times3.50=1.975\approx1.98$，则$a=e^{1.98}$

$\therefore y=a\cdot e^{bx}=e^{1.98}\cdot e^{0.43x}=e^{0.43x+1.98}$． ……6分

（Ⅱ）由题意得选取的4位车主中购买电动汽车的车主人数X可能取值为$1,2,3,4$．

$P(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_3^3}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$，　　$P(X=2)=\frac{C_5^2\cdot C_3^2}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$

$P(X=3)=\frac{C_5^3\cdot C_3^1}{C_8^4}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$　　$P(X=4)=\frac{C_5^4}{C_8^4}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

则分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{14}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{3}{7}+4\times\frac{1}{14}=\frac{5}{2}$. ……………………………………………12 分

20.（Ⅰ）证明：$\because PA\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AD$，

又$AB\perp AD$，$PA\cap AB=A$，$\therefore AD\perp$平面PAB，又$PB\subset$平面PAB，

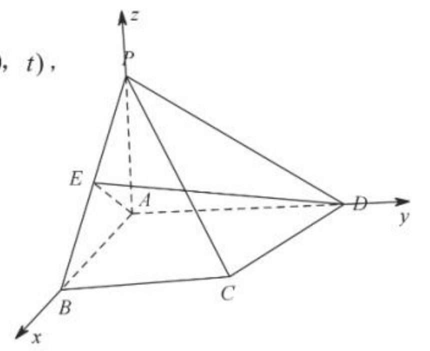
$\therefore PB\perp AD$，$\because AB=AP$，E为PB中点，$\therefore PB\perp AE$，$AE\cap AD=A$

$\therefore PB\perp$平面AED，又$PB\subset$平面PBC，

$\therefore$平面$PBC\perp$平面ADE. ……………………………………………………………4 分

（Ⅱ）(i) 以点A坐标原点，以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$分别为$x$，$y$，$z$轴，

建立如下图所示的空间直角坐标系，由题,设$AB=t(0<t<6)$，



$\therefore AD=6-t$，$C(1,5-t,0)$，$D(0,6-t,0)$，$P(0,0,t)$，

$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0),\overrightarrow{PD}=(0,6-t,-t)$，

设平面PCD的法向量$\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-x+y=0\\(6-t)y-tz=0\end{cases}$，令$y=t$，

得$\overrightarrow{n_1}=(t,t,6-t)$ ……………………………………………………………6 分

平面PAB的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，

$\therefore\left|\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{t}{\sqrt{t^2+t^2+(6-t)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\therefore t^2+4t-12=0$，

$\therefore t=-6$（舍）或$t=2$，$\therefore AB=2$ ……………………………………………8 分

（ii）存在，由（i）得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，设点 $G(0，y，z)$，$(0\le y\le 4,0\le z\le 2)$，

$\because GB=2GA$，$\therefore \sqrt{4+y^2+z^2}=2\sqrt{y^2+z^2}$，

即：$y^2+z^2=\dfrac{4}{3}$ ……………………………………………………………………10 分

$\therefore G$ 的轨迹是平面 Ayz 内以 A 为圆心，$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆的 $\dfrac{1}{4}$，

$\therefore G$ 的轨迹的长度为 $\dfrac{1}{4}\times 2\pi\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ……………………………………12 分

21．解：（Ⅰ）连接 QB，则 $||QB|-|QC||=||QM|-|QC||=|CM|=2$（$|BC|=4>2$）

$\therefore Q$ 点的轨迹是以点 C，M 为焦点的双曲线，

$\therefore Q$ 点的轨迹方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………………4 分

（Ⅱ）解：当直线 l 的方程为 $x=2$ 时，解得 $P(2,3)$，

易知此时 ΔACP 为等腰直角三角形，其中 $\angle ACP=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{4}$，

即 $\angle ACP=2\angle PAC$，即：$\lambda=2$ ……………………………………………………6 分

下证：$\angle ACP=2\angle PAC$ 对直线 l 斜率存在的情形也成立，

$$\tan 2\angle PAC=\frac{2\tan\angle PAC}{1-\tan^2\angle PAC}=\frac{2k_{PA}}{1-k^2{}_{PA}}=\frac{2\dfrac{y_1}{x_1+1}}{1-(\dfrac{y_1}{x_1+1})^2}=\frac{2(x_1+1)y_1}{(x_1+1)^2-(y_1)^2},$$

$$\therefore \tan 2\angle PAC=\frac{2(x_1+1)y_1}{(x_1+1)^2-3(x_1{}^2-1)}=\frac{2(x_1+1)y_1}{-2(x_1+1)(x_1-2)}=\frac{-y_1}{x_1-2}$$

$$\therefore \tan\angle ACP=-k_{PC}=\frac{-y_1}{x_1-2}=\tan 2\angle PAC$$

$\therefore$ 结合正切函数在 $(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上的图像可知，$\angle ACP=2\angle PAC$ ………12 分

22.（I）证明：$\because f_n(x)=(x+n)\cdot e^x$，$\therefore f_n'(x)=(x+n+1)\cdot e^x$ ………………1 分

$\because x>-n-1$时，$f_n'(x)>0$，$\therefore f_n(x)$在$(-n-1,+\infty)$上单调递增；

$\because x<-n-1$时，$f_n'(x)<0$，$\therefore f_n(x)$在$(-\infty,-n-1)$上单调递减；

$\therefore f_n(x)$的最小值为$f_n(-n-1)=-\frac{1}{e^{n+1}}$，即$a_n=-\frac{1}{e^{n+1}}$， ………………………2 分

$\therefore \sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{-\frac{1}{e^2}(1-\frac{1}{e^n})}{1-\frac{1}{e}}>\frac{-\frac{1}{e^2}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-e^2}$ 得证 ………………4 分

（II）解：要使$a(e^{ax}+1)-2f(x)=a(e^{ax}+1)-2(x+\frac{1}{x})\ln x\geq 0,(x>1)$

只需$a(e^{ax}+1)\geq 2(x+\frac{1}{x})\ln x$

当$a\leq 0$时，又$x>1$，$a(e^{ax}+1)\leq 0$，$2(x+\frac{1}{x})\ln x>0$

与恒成立条件矛盾，所以$a>0$； ……………………………………………………5 分

当$a>0$时，不等式整理得$ax(e^{ax}+1)\geq 2(x^2+1)\ln x$

即$axe^{ax}+ax\geq x^2\ln x^2+\ln x^2=\ln x^2\cdot e^{\ln x^2}+\ln x^2$， ……………………………6 分

设$g(t)=te^t+t$，由（1）知$g'(t)=(t+1)e^t+1>0$恒成立，

$\therefore g(t)=te^t+t$在R上单调递增.又因为$a>0$，$x\in(1,+\infty)$，

所以原不等式恒成立只需满足$x\in(1,+\infty)$时，$ax\geq\ln x^2$恒成立

又$x\in(1,+\infty)$，则只需满足$a\geq\frac{2\ln x}{x}$恒成立. ……………………………………9 分

设$h(x)=\frac{2\ln x}{x}$，则$h'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$ $x\in(1,+\infty)$，

$\therefore x\in(1,\mathrm{e})$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单增，

$\therefore x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单减，

$\therefore a\geq h_{\max}(x)=h(e)=\frac{2}{e}$ $\therefore a\geq\frac{2}{e}$ ………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。