

2023-2024 学年高三上学期期末广东省深圳市龙岗区期末质量监测数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x|x^2 < 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1\}$
2. 已知复数 $z = 1 - \sqrt{3}i$, 则 z^2 在复平面内对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和, $a_6 + a_3 - a_5 = 3$, 则 $S_7 =$ ()
A. 42 B. 21 C. 7 D. 3
4. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值为 ()
A. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
5. 已知 $5^a = 10^b$, 则 $\frac{b}{a} =$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\log_5 10$ D. $1 - \lg 2$
6. 过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 A 作圆 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 的切线, 切点为 B , 则 $|AB|$ 的最小值为 ()
A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{7}$
7. 已知函数 $f(x) = x(1 + \frac{m}{1-e^x})$ 是偶函数, 则 m 的值是 ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
8. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 1$, 将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起至 $\triangle C'BD$, 当 $C'B$ 与 AD 所成角最大时, 三棱锥 $C'-ABD$ 的体积等于 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 关于二项式 $(x^2 - \frac{2}{x})^8$ 的展开式, 下列结论正确的是 ()
A. 展开式所有项的系数和为 -1 B. 展开式二项式系数和为 256
C. 展开式中第 5 项为 $1120x^4$ D. 展开式中不含常数项
10. 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的单位向量, $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, 下列结论正确的是 ()
A. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$
C. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$ D. \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\vec{b}$
11. 下列说法中正确的是 ()
A. 用简单随机抽样的方法从含有 60 个个体的总体中抽取一个容量为 6 的样本, 则个体 m 被抽到

的概率是 0.1

B. 已知一组数据 1, 2, m , 6, 7 的平均数为 4, 则这组数据的方差是 $\frac{26}{5}$

C. 数据 13, 27, 24, 12, 14, 30, 15, 17, 19, 23 的第 70 百分位数是 23

D. 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的标准差为 8, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的标准差为 32

12. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴的交点为 P , 过点 F 的直线与抛物线交于点 M, N , 过点 P 的直线与抛物线交于点 A, B , 则 ()

A. $|MN| \geq 4$

B. $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -4$

C. $|OA|^2 + |OB|^2 > 10$

D. $|AF| + |BF| > 2|PF|$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $y = \cos^2 x$ 的最小正周期为 _____.

14. 有甲、乙、丙三项任务, 其中甲需 2 人承担, 乙、丙各需 1 人承担; 现从 6 人中任选 4 人承担这三项任务, 则共有 _____ 种不同的选法

第二步, 再从剩余 4 人中任选 1 人承担任务乙, 有 C_4^1 种选法,

第三步, 再从 3 人中任选 1 人承担任务丙, 有 C_3^1 种选法,

所以共有 $C_6^2 C_4^1 C_3^1 = 180$ 种选法.

故答案为: 180.

15. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点, E 上两点 A, B 满足 $3\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$, $|AF_1| = 2|AF_2|$, 则 E 的离心率为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = a^x + (1+a)^x - 2 (a > 0$ 且 $a \neq 1)$, 若函数 $f(x)$ 恰有一个零点, 则实数 a 的取值范围为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$.

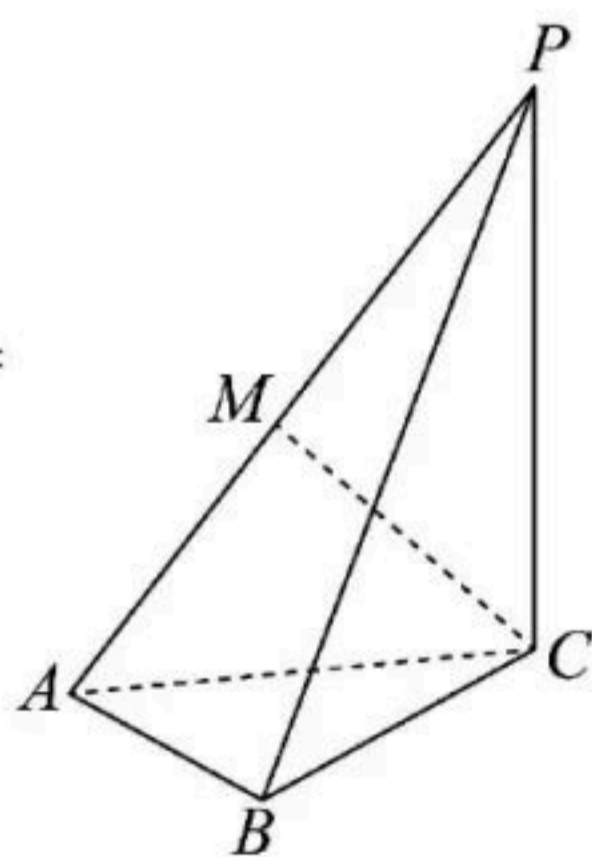
(1) 求 B ;

(2) 若 $c = 3, b = \sqrt{13}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PC \perp$ 平面 ABC , $AB = BC = \frac{1}{2}PC = 2, PA = 2\sqrt{6}$.

(1) 求证: $AB \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若 M 是 PA 的中点, 求 CM 与平面 PAB 所成角的余弦值.



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_n + a_m + 2mn$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{3}{2}$, 过点 F_1 的直线 l 与

双曲线的左、右两支分别交于点 A, B . 当 $BF_2 \perp l$ 时, $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 5.

(1) 求双曲线的标准方程;

(2) 若直线 l 与 y 轴交于点 M , 且 $\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{AF_1}$, $\overrightarrow{MB} = \mu \overrightarrow{BF_1}$, 求证: $\lambda + \mu$ 为定值.

21. 某工厂采购了一批新的生产设备. 经统计,设备正常状态下,生产的产品正品率为 0.98. 为监控设备生产过程,检验员每天从该设备生产的产品中随机抽取 10 件产品,并检测质量. 规定:抽检的 10 件产品中,若至少出现 2 件次品,则认为设备生产过程出现了异常情况,需对设备进行检测及修理.

(1) 假设设备正常状态,记 X 表示一天内抽取的 10 件产品中的次品件数,求 $P(X \geq 2)$,并说明上述监控生产过程规定的合理性;

(2) 该设备由甲、乙两个部件构成,若两个部件同时出现故障,则设备停止运转;若只有一个部件出现故障,则设备出现异常. 已知设备出现异常是由甲部件故障造成的概率为 p ,由乙部件故障造成的概率为 $1-p$. 若设备出现异常,需先检测其中一个部件,如果确认该部件出现故障,则进行修理,否则,继续对另一部件进行检测及修理. 已知甲部件的检测费用 1000 元,修理费用 5000 元,乙部件的检测费用 2000 元,修理费用 4000 元. 当设备出现异常时,仅考虑检测和修理总费用,应先检测甲部件还是乙部件,请说明理由.

参考数据: $0.98^{10} \approx 0.82, 0.98^9 \approx 0.83, 0.98^8 \approx 0.85$.

22. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 > x_2$. 证明: $\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} > \frac{1}{a}$.