2023～2024 学年度上期期末高一年级调研考试

数学参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、单选题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. D； 2. C； 3. B； 4. A； 5. B； 6. D； 7. A； 8. B.

二、多选题:(每小题 5 分,共 20 分)

9. BD； 10. AD； 11. ABD； 12. BCD.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 6； 14. $\frac{1}{7}$； 15. -2； 16. $(1,\frac{5}{4})\cup(\frac{5}{4},+\infty)$.

四、解答题:(共 70 分)

17. **解:**(I)当 $a=2$ 时,则 $B=\{x\mid x>2\}$,$A=\{x\mid 1<x<3\}$. ……2 分

所以 $A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$. ……4 分

又 $U=\mathbf{R}$, 于是 $\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 2\}$, ……5 分

所以 $A\cup(\complement_U B)=\{x\mid x<3\}$. ……7 分

(II)因为 $A=\{x\mid 1<x<3\}$,$B=\{x\mid x>a\}$,

又因为 $A\subseteq B$,所以 $a\leqslant 1$. ……9 分

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$. ……10 分

18. **解:**(I)令 $z=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}$,

因为 $y=\sin z$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$. ……2 分

所以 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

即 $-\frac{5\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$. ……5 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{5\pi}{3}+4k\pi,\frac{\pi}{3}+4k\pi](k\in\mathbf{Z})$. ……6 分

(II)由(I)知函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增,在 $[\frac{\pi}{3},\pi]$ 上单调递减. ……8 分

又 $f(0)=\sqrt{3}$,$f(\frac{\pi}{3})=2$,$f(\pi)=1$. ……10 分

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值域是 $[1,2]$. ……12 分

19. **解:**(I)依题意知 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times 2\cdot a\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}\times 1\cdot(4-a)\geqslant 0.25.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geqslant 1,\\ a\leqslant \dfrac{7}{2}.\end{cases}$ ……2 分

所以 a 的取值范围是 $[1,\dfrac{7}{2}]$. ……4 分

(II)依题意得 $W=(1+\dfrac{9}{2a^2})\cdot a+1\times\dfrac{4-a}{2}+0.1$ ……6 分

$=a+\dfrac{9}{2a}+\dfrac{4-a}{2}+0.1=\dfrac{a}{2}+\dfrac{9}{2a}+2.1=\dfrac{1}{2}(a+\dfrac{9}{a})+2.1$ ……8 分

$\geqslant\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{a\cdot\dfrac{9}{a}}+2.1=5.1$. ……10 分

当且仅当 $a=\dfrac{9}{a}$ 即 $a=3$ 时取等. ……11 分

所以当点 P 满足 $A_0P=3$ 时, W 最小,最小值为 5.1 亿元. ……12 分

20. **解:**(I)函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……1 分

证明:任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$, ……2 分

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\dfrac{1}{x_1})-(x_2+\dfrac{1}{x_2})=(x_1-x_2)+\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{1}{x_1x_2}\right)=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}(x_1x_2-1)$. ……4 分

因为 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

所以 $x_1-x_2<0$, $x_1x_2>1$, $x_1x_2-1>0$. ……5 分

从而 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……6 分

(II)由(I)知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,同理可证 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减.

……7 分

令 $u=2^x$,则 $u\in(0,+\infty)$,且 $f(u)<\dfrac{5}{2}$. ……8 分

注意到 $f(\dfrac{1}{2})=f(2)=\dfrac{5}{2}$.

所以 $\dfrac{1}{2}<u<2$,即 $\dfrac{1}{2}<2^x<2$. ……10 分

因为 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $-1<x<1$. ……11 分

所以不等式 $f(2^x)<\frac{5}{2}$ 的解集是 $(-1,1)$. ……12 分

21. **解**:(I)当 $a=1$ 时,函数 $f(x)=(\lg x)^2+\lg x+\frac{5}{4}$.

令 $t=\lg x$,因为 $x\in[\frac{1}{10},100]$,所以 $t\in[-1,2]$. ……2 分

由 $y=t^2+t+\frac{5}{4}$ 开口向上且对称轴 $t=-\frac{1}{2}$. ……3 分

当 $t=-\frac{1}{2}$ 时,$y=t^2+t+\frac{5}{4}$ 取到最小值 1. ……4 分

所以当 $t=-\frac{1}{2}$ 即 $x=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值 1. ……5 分

(II)令 $u=\lg x_0$,则 $u\in(0,+\infty)$,所以 $u^2+au+\frac{5}{4}-a=0$ 存在正根. ……6 分

$\Delta=a^2-4(\frac{5}{4}-a)=a^2+4a-5=(a+5)(a-1)\geqslant 0$. 解得 $a\leqslant -5$ 或 $a\geqslant 1$.

……7 分

记 $h(u)=u^2+au+\frac{5}{4}-a$,$u\in(0,+\infty)$.

①当 $a\leqslant -5$ 时,此时 $h(0)=\frac{5}{4}-a>0$,对称轴 $u=-\frac{a}{2}>0$,

于是 $h(u)=u^2+au+\frac{5}{4}-a=0$ 有两个正根(可能相等),合题意. 所以 $a\leqslant -5$.

……9 分

②当 $a\geqslant 1$ 时,此时对称轴 $u=-\frac{a}{2}<0$,

因为 $h(u)=u^2+au+\frac{5}{4}-a=0$ 存在正根,

所以 $h(0)=\frac{5}{4}-a<0$,解得 $a>\frac{5}{4}$. ……11 分

综上所述,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-5]\cup(\frac{5}{4},+\infty)$. ……12 分

22. **解**:(I)当 $a=\sqrt{2}$ 时,则 $f(x)=x-4\sqrt{2}+|x-\sqrt{2}|$.

①若 $x<\sqrt{2}$,则 $f(x)=x-4\sqrt{2}+\sqrt{2}-x=-3\sqrt{2}\neq-\sqrt{2}$; ……1 分

②若 $x\geqslant\sqrt{2}$,则 $f(x)=x-4\sqrt{2}+x-\sqrt{2}=2x-5\sqrt{2}=-\sqrt{2}$,

则 $x=2\sqrt{2}>\sqrt{2}$.

所以 $x=2\sqrt{2}$. ……3 分

(II)证明:要证 $g(x)\leqslant\sqrt{10}$，

只要证 $2\sqrt{2-x^2}\leqslant x+\sqrt{10}$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

只要证 $4(2-x^2)\leqslant x^2+2\sqrt{10}x+10$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. ……4 分

只要证 $5x^2+2\sqrt{10}x+2\geqslant 0$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. ……5 分

只要证 $(\sqrt{5}x+\sqrt{2})^2\geqslant 0$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.（*） ……6 分

显然(*)成立，当且仅当 $x=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 取等.

所以 $g(x)\leqslant\sqrt{10}$. ……7 分

(Ⅲ) $h(x)=|f(x)+g(x)|=\left|2\sqrt{2-x^2}+|x-a|-4\sqrt{2}\right|$.

令 $H(x)=2\sqrt{2-x^2}+|x-a|-4\sqrt{2}$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

依题意知 $|H(x)|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

则 $\left|H(-\sqrt{2})\right|\leqslant 2\sqrt{2}$ 即 $2\sqrt{2}\leqslant|a+\sqrt{2}|\leqslant 6\sqrt{2}$，

注意到 $a>0$，所以 $2\sqrt{2}\leqslant a+\sqrt{2}\leqslant 6\sqrt{2}$，即 $\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 5\sqrt{2}$. ……8 分

从而 $H(x)=2\sqrt{2-x^2}-x+a-4\sqrt{2}=g(x)+a-4\sqrt{2}$，$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

因为 $g(x)=2\sqrt{2-x^2}-x\geqslant 0-\sqrt{2}=-\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 取等.

又由(II)知 $g(x)\leqslant\sqrt{10}$，当且仅 $x=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 取等.

所以 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{10}]$. ……9 分

于是 $H(x)$ 的值域为 $[a-5\sqrt{2},a+\sqrt{10}-4\sqrt{2}]$.

令 $a-5\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$，则 $a=3\sqrt{2}$.

令 $a+\sqrt{10}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，则 $a=6\sqrt{2}-\sqrt{10}$.

①当 $a=3\sqrt{2}$ 时，$H(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{2},\sqrt{10}-\sqrt{2}]$，

此时 $h(x)$ 的最大值恰为 $2\sqrt{2}$. 合题意. ……10 分

②当 $a=6\sqrt{2}-\sqrt{10}$ 时，$H(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2}-\sqrt{10},2\sqrt{2}]$，

此时 $h(x)$ 的最大值恰为 $2\sqrt{2}$. 合题意. ……11 分

综上所述，a 的值为 $3\sqrt{2}$ 或 $6\sqrt{2}-\sqrt{10}$. ……12 分