数学试卷

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分.共4页，总分150分，考试时间120分钟.

第I卷（选择题共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{x|-1<x<1\},B=\{x|0\leq x\leq 2\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $[0,1)$　　B. $(-1,2]$　　C. $(1,2]$　　D. $(0,1)$

【答案】A

【解析】

【分析】直接利用集合的交运算法则进行运算即可.

【详解】因为集合$A=\{x|-1<x<1\},B=\{x|0\leq x\leq 2\}$，

故$A\cap B=\{x|0\leq x<1\}$，

故选：A.

2. 已知直线l_1：$ax+y-3=0$和直线l_2：$3x-2y+3=0$垂直，则$a=$（　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由直线垂直的充要条件列出关于a的方程，解方程即可.

【详解】因为直线l_1：$ax+y-3=0$和直线l_2：$3x-2y+3=0$垂直，

所以$a\times 3+1\times(-2)=0$，解得$a=\frac{2}{3}$.

故选：D.

3. 已知圆锥的底面半径为2，高为$4\sqrt{2}$，则该圆锥的侧面积为（　）

A. 4π　　B. 12π　　C. 16π　　D. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$

【答案】B

【解析】

【分析】由圆锥的侧面展开图扇形基本量与圆锥基本量间的关系可得.

【详解】已知圆锥的底面半径$r=2$，高$h=4\sqrt{2}$，

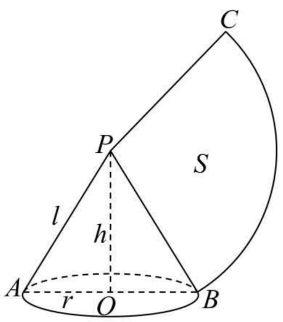
则母线长$l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$，

圆锥的侧面展开图为扇形，且扇形的弧长为圆锥底面圆周长$2\pi r$，

扇形的半径为圆锥的母线长l，

则圆锥侧面积$S=\frac{1}{2}\times 2\pi rl=\pi rl=2\times 6\pi=12\pi$.

故选：B.



4. 已知函数$f\left(x\right)$是定义域为R的奇函数，当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=x\left(1+x\right)$，则$f\left(-1\right)=$（　　）

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用奇函数的定义计算得解.

【详解】定义在R上的奇函数$f\left(x\right)$，当$x\geq 0$时，$f\left(x\right)=x\left(1+x\right)$，

所以$f\left(-1\right)=-f(1)=-2$.

故选：B

5. 已知α是第一象限角，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$\cos 2\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$（　　）

A. $-\frac{13}{5}$　　B. $-\frac{7}{5}$　　C. $\frac{13}{5}$　　D. $\frac{1}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】由同角三角函数关系式及二倍角公式化简求值.

【详解】因为α是第一象限角，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以$\cos2\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos^2\alpha-1-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\times\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-1-\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=-\frac{7}{5}$，

故选：B.

6. 记S_n为等比数列$\{a_n\}(a_n>0)$的前n项和，且$a_1a_3=16, S_1, \frac{3}{4}S_2, \frac{1}{2}S_3$成等差数列，则$S_6=$（　　）

A. 126　　B. 128　　C. 254　　D. 256

【答案】A

【解析】

【分析】根据可得$\begin{cases}a_1a_3=a_2^2=16\\S_1+\frac{1}{2}S_3=\frac{3}{2}S_2\end{cases}$，整理得$\begin{cases}a_2=4\\a_3=2a_2=8\end{cases}$，进而可得$\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}$，结合等比数列的求和公式运算求解.

【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_1>0, q>0$，

由题意可得$\begin{cases}a_1a_3=a_2^2=16\\S_1+\frac{1}{2}S_3=\frac{3}{2}S_2\end{cases}$，即$\begin{cases}a_2=4\\a_1+\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)=\frac{3}{2}(a_1+a_2)\end{cases}$，

整理得$\begin{cases}a_2=4\\a_3=2a_2=8\end{cases}$，则$\begin{cases}a_1q=4\\a_1q^2=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=2\\q=2\end{cases}$，

所以$S_6=\frac{2\times(1-2^6)}{1-2}=126$.

故选：A.

7. 直线$x+y+2=0$分别与x轴，y轴交于A，B两点，点P在圆$(x-2)^2+y^2=2$上，则$\triangle ABP$面积的取值范围是

A. $[2, 6]$　　B. $[4, 8]$　　C. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

【答案】A

【解析】

【详解】分析：先求出A，B两点坐标得到$|AB|$，再计算圆心到直线距离，得到点P到直线距离范围，由面积公式计算即可

详解：$\because$直线$x+y+2=0$分别与x轴，y轴交于A，B两点

$\therefore A(-2,0),B(0,-2)$,则$|AB|=2\sqrt{2}$

$\because$点P在圆$(x-2)^2+y^2=2$上

$\therefore$圆心为（2，0），则圆心到直线距离$d_1=\dfrac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

故点P到直线$x+y+2=0$的距离d_2的范围为$\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

则$S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}|AB|d_2=\sqrt{2}d_2\in[2,6]$

故答案选A.

点睛：本题主要考查直线与圆，考查了点到直线的距离公式，三角形的面积公式，属于中档题.

8. 设$a=2\ln 0.99$，$b=\ln 0.98$，$c=\sqrt{0.96}-1$，则（　　）

A. $a<b<c$　　　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　　　D. $c<b<a$

【答案】D

【解析】公众号：高中试卷君

【分析】根据对数的运算法则及对数函数的单调性，直接比较a和b的大小；构造函数$f(x)=\ln(1-x)-\sqrt{1-2x}+1$，求导判断其单调性，进而比较$b$和$c$的大小.

【详解】$a=2\ln 0.99=\ln 0.99^2=\ln 0.9801>\ln 0.98=b$，

令$x=0.02, b=\ln(1-x), c=\sqrt{1-2x}-1$，

令$f(x)=\ln(1-x)-\sqrt{1-2x}+1\ (x<\dfrac{1}{2})$，

$f'(x)=\dfrac{1-x-\sqrt{1-2x}}{(1-x)\sqrt{1-2x}}$，

$(1-x)^2=1-2x+x^2\geq 1-2x>0$，

所以$1-x\geq\sqrt{1-2x}$，即$f'(x)\geq 0$，故$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增，

所以$f(0.02)>f(0)=0$，即$b>c$，综上，$a>b>c$.

故选：D.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n=-n^2+7n$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\{a_n\}$是递增数列　　B. $a_{10}=-14$

C. 当$n>4$时，$a_n<0$　　D. 当$n=3$或4时，S_n取得最大值

【答案】CD

【解析】

【分析】根据S_n表达式及$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$的关系，算出数列$\{a_n\}$通项公式，即可判断A、B、C选项的正误. $S_n=-n^2+7n$的最值可视为定义域为正整数的二次函数来求得.

【详解】当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n+8$，又$a_1=S_1=6=-2\times 1+8$，所以$a_n=-2n+8$，则$\{a_n\}$是递减数列，故A错误；

$a_{10}=-12$，故B错误；

当$n>4$时，$a_n=8-2n<0$，故C正确；

因为$S_n=-n^2+7n$的对称轴为$n=\dfrac{7}{2}$，开口向下，而n是正整数，且$n=3$或4距离对称轴一样远，所以当$n=3$或4时，S_n取得最大值，故D正确.

故选：CD.

10. 已知函数$f(x)=(2-x)e^x$，则下列说法错误的是（　　）

A. $f(x)$的图象在$x=2$处的切线斜率大于0

B. $f(x)$的最大值为e

C. $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增

D. 若$f(x)=a$有两个零点，则$a<e$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用函数的导数逐项判断求解即可.

【详解】由题得 $f'(x)=-e^x+(2-x)e^x=(1-x)e^x$，则 $f'(2)=-e^2<0$，故 A 错误；

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 的极大值即最大值为 $f(1)=e$，故 B 正确，C 错误；

令 $g(x)=f(x)-a$，则 $g'(x)=(1-x)e^x$，

由 B 知 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(1)=e-a$，且当 x 趋向于 $-\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 $-a$，当 x 趋向于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 $-\infty$，

所以若 $f(x)=a$ 有两个零点，则 $\begin{cases}e-a>0\\-a<0\end{cases}$，即 $0<a<e$，故 D 错误.

故选：ACD

11. 已知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，$g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，则下列结论正确的是（　）

A. $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$

B. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 3π，则 $\omega=\dfrac{2}{3}$

C. 若 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有 3 个最值点，则 ω 的取值范围为 $\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3}\right]$

D. 若 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 ω 的最小值为 2

【答案】ABC

【解析】

【分析】先求出函数 $f(x)$ 的解析式，然后逐项判断即可求解.

【详解】对 A：若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)(\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 为偶函数，则 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，A 选项正确；

对 B：若 $g(x)$ 的最小正周期为 3π，则 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=3\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2}{3}$，故 B 正确；

对 C：由 $x\in(0,\pi)$，得 $\omega x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$，若 $g(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有 3 个最值点，

则 $\dfrac{5\pi}{2}<\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7\pi}{2}$，得 $\dfrac{7}{3}<\omega\le\dfrac{10}{3}$，故 C 正确；

对 D：因为 $g(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，若 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\omega\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

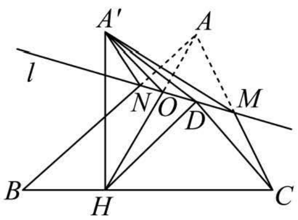
则 $\omega\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\omega\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$，

得 $\omega=\dfrac{2}{3}+8k$ 或 $\omega=2+8k,k\in\mathbf{Z}$，

又 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$，故 D 错误.

故选：ABC.

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，过 AC 中点 M 的直线 l 与线段 AB 交于点 N．将 $\triangle AMN$ 沿直线 l 翻折至 $\triangle A'MN$，且点 A' 在平面 $BCMN$ 内的射影 H 在线段 BC 上，连接 AH 交 l 于点 O，D 是直线 l 上异于 O 的任意一点，则（　　）



A. $\angle A'DH\ge\angle A'DC$

B. $\angle A'DH\le\angle A'OH$

C. 点 O 的轨迹的长度为 $\dfrac{\pi}{6}$

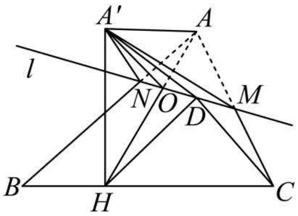
D. 直线 $A'O$ 与平面 $BCMN$ 所成角的余弦值的最小值为 $8\sqrt{3}-13$

【答案】BCD

【解析】

【分析】A、B 选项结合线面角最小，二面角最大可判断;对于 C，先由旋转，易判断出 $MN\perp AO$，故其轨迹为圆弧，即可求解.对于 D 求直线与平面所成角的余弦值，即求 $\dfrac{OH}{A'O}=\dfrac{OH}{AO}$，

$\angle AMN=\theta\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，用 θ 表示 AO,OH，再结合三角恒等变换求出函数的最值即可

【详解】

依题意，将$\triangle AMN$沿直线l翻折至$\triangle A'MN$，连接AA'，由翻折的性质可知，关于所沿轴对称的两点连线被该轴垂直平分，

故$AA' \perp MN$，又A'在平面$BCMN$内的射影H在线段BC上，

所以$A'H \perp$平面$BCMN$，$MN \subset$平面$BCMN$，所以$A'H \perp MN$，

$AA' \cap A'H = A'$，$AA' \subset$平面$A'AH$，$A'H$平面$A'AH$

所以$MN \perp$平面$A'AH$.

$AO \subset$平面$A'AH$，$A'O \subset$平面$A'AH$，$A'H \subset$平面$A'AH$，

$AO \perp MN, A'O \perp MN, A'H \perp MN$，

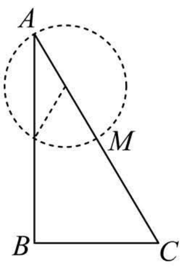
$\therefore \angle AOM = 90^\circ$，且$\angle A'OH$即为二面角$A'-MN-B$的平面角

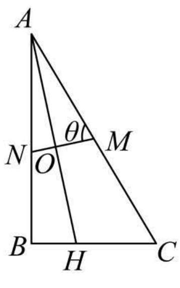
对于A选项，由题意可知，$\angle A'DH$为$A'D$与平面$BCMN$所成的线面角，故由线面角最小可知$\angle A'DH \le \angle A'DC$，故A错误；

对于B选项，$\because \angle A'OH$即为二面角$A'-MN-B$的平面角，故由二面角最大可知$\angle A'DH \le \angle A'OH$，故B正确；

对于C选项，$\because MN \perp AO$恒成立，故O的轨迹为以AM为直径的圆弧夹在$\triangle ABC$内的部分，易知其长度为$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，故C正确；

对于D选项，如下图所示





设$\angle AMN=\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，

在$\triangle AOM$中，$\because \angle AOM = 90^\circ$，$\therefore AO = AM\sin\theta = \sin\theta$，

在$\triangle ABH$中，$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$，$AH=\dfrac{AB}{\cos\angle BAH}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}$，

所以$OH=AH-AO=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}-\sin\theta$，设直线$A'O$与平面$BCMN$所成角为$\alpha$，

则$\cos\alpha=\dfrac{OH}{AO}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}-\sin\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}-1=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-1$

$\geq\dfrac{2\sqrt{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-1=8\sqrt{3}-13$，

当且仅当$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{5\pi}{12}$时取等号，故D正确．

故选：BCD．

第II卷（非选择题共90分）

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知向量$\vec{a}=(2,-1),\vec{b}=\left(k,\dfrac{5}{2}\right)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$k=$__________.

【答案】-5

【解析】

【分析】根据向量平行关系得到方程，求出答案.

【详解】因为$\vec{a}//\vec{b}$，所以$-1\times k=2\times\dfrac{5}{2}$，故$k=-5$.

故答案为：-5

14. 写出一个圆心在$y=x$上，且与直线$y=-x$和圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$都相切的圆的方程：______.

【答案】$(x-1)^2+(y-1)^2=2$（答案不唯一）

【解析】

【分析】由题设，设圆心为(m,m)，则半径$r=\sqrt{2}|m|$，讨论所求圆与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$外切、内切，分别求出对应m即可得结果.

【详解】设圆心为(m,m)，则半径$r=\frac{|m+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|m|$，

假设与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$外切，则$\sqrt{(m-3)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}|m|$，

所以$|m-3|=1+|m|$，故$m^2-6m+9=m^2+2|m|+1$，则$3m+|m|=4$，

若$m>0$，则$4m=4\Rightarrow m=1$，则圆心为$(1,1)$，半径为$r=\sqrt{2}$，故$(x-1)^2+(y-1)^2=2$；

若$m<0$，则$2m=4\Rightarrow m=2$，不满足前提；

假设与圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$内切，又$(3,3)$与$y=-x$的距离为$\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}>\sqrt{2}$，

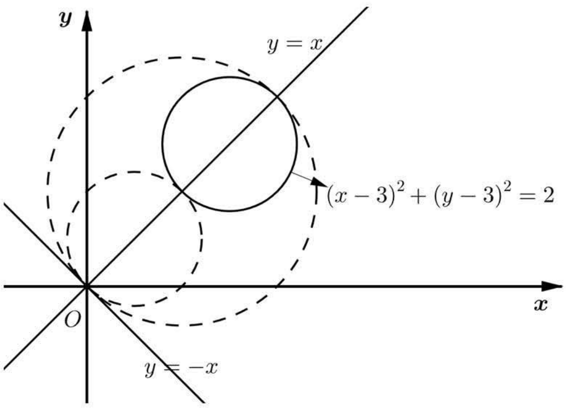
此时，圆$(x-3)^2+(y-3)^2=2$内切于所求圆，则$\sqrt{(m-3)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2}|m|-\sqrt{2}$，

所以$|m-3|=|m|-1$，故$m^2-6m+9=m^2-2|m|+1$，则$3m-|m|=4$，

若$m>0$，则$2m=4\Rightarrow m=2$，则圆心为$(2,2)$，半径为$r=2\sqrt{2}$，故$(x-2)^2+(y-2)^2=8$；

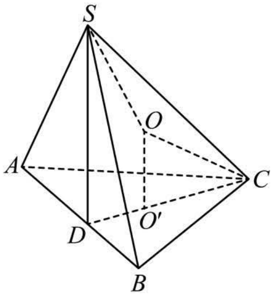
若$m<0$，则$4m=4\Rightarrow m=1$，不满足前提；

综上，$(x-1)^2+(y-1)^2=2$或$(x-2)^2+(y-2)^2=8$.



故答案为：$(x-1)^2+(y-1)^2=2$（答案不唯一）

15. 表面积为100π的球面上有四点S、A、B、C，$\triangle ABC$是等边三角形，球心O到平面ABC的距离为3，若面$SAB\perp$面ABC，则棱锥$S-ABC$体积的最大值为__________.



【答案】$12(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

【解析】

【分析】求出球半径及球心到平面 ABC 的距离，进而求出 $\triangle ABC$ 外接圆半径，利用面面垂直结合球的截面小圆性质，求出 $\triangle SAB$ 的外接圆半径，确定点 S 到平面 ABC 的最大距离即可作答.

【详解】依题意，球 O 的半径 $R=5$，令正 $\triangle ABC$ 的中心为 O'，则 $OO'=3$，且 $OO'\perp$ 平面 ABC，

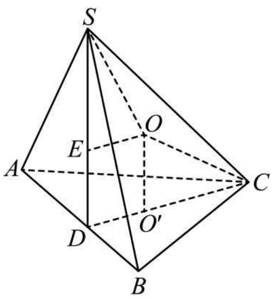
$\triangle ABC$ 外接圆半径 $r=CO'=\sqrt{R^2-OO'^2}=4$，连接 CO' 并延长交 AB 于 D，则 D 为 AB 的中点，且 $O'D=\frac{1}{2}r=2$，

显然 $CD\perp AB$，而平面 $SAB\perp$ 平面 ABC，平面 $SAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，有 $CD\perp$ 平面 SAB，

令 $\triangle SAB$ 的外接圆圆心为 E，则 $OE\perp$ 平面 SAB，有 $OE//O'D$，

又 $OO'\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OO'\perp AB$，

由 $OO'\cap CD=O'$,所以 $AB\perp$ 平面 $OO'DE$，所以 $ED\perp AB$，



而平面 $SAB\perp$ 平面 ABC，平面 $SAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$ED\subset$ 平面 SAB，则 $ED\perp$ 平面 ABC，

即有 $ED//OO'$，因此四边形 $OO'DE$ 为平行四边形，则 $ED=OO'=3$，$OE=O'D=2$，

$\triangle SAB$ 的外接圆半径 $r'=\sqrt{R^2-OE^2}=\sqrt{21}$，$\triangle SAB$ 的外接圆上点 S 到直线 AB 距离最大值为 $r'+ED=\sqrt{21}+3$，

而点 S 在平面 ABC 上的射影在直线 AB 上，于是点 S 到平面 ABC 距离的最大值 $h=\sqrt{21}+3$，

又正 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}r^2=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=12\sqrt{3}$，

所以棱锥 $S-ABC$ 的体积最大值 $V_{S-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times12\sqrt{3}\times(\sqrt{21}+3)=12(\sqrt{7}+\sqrt{3})$.

故答案为：$12(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

【点睛】关键点睛：解决与球有关的内切或外接问题时，关键是确定球心的位置，再利用球的截面小圆性质求解.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\dfrac{4}{3},a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1\left(n\in N^*\right)$，则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2017}}$ 的整数部分是__________.

【答案】2

【解析】

【详解】因为 $a_1=\dfrac{4}{3},a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1\left(n\in N^*\right)$，所以 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0\Rightarrow a_{n+1}>a_n$，

数列 $\{a_n\}$ 单调递增，

所以 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)>0$，所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n(a_n-1)}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=(\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_1})+(\dfrac{1}{a_2-1}-\dfrac{1}{a_2})+\cdots+(\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n})=\dfrac{1}{a_1-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$，

所以 $m=S_{2017}=3-\dfrac{1}{a_{2017}-1}$，

因为 $a_1=\dfrac{4}{3}$，所以 $a_2=(\dfrac{4}{3})^2-\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{13}{9},a_3=(\dfrac{13}{9})^2-\dfrac{13}{9}+1=\dfrac{133}{81},a_4=(\dfrac{133}{81})^2-\dfrac{133}{81}+1>2,\cdots$，

所以 $a_{2017}>a_{2016}>a_{2015}>\cdots>a_4>2$，

所以 $a_{2017}-1>1$，所以 $0<\dfrac{1}{a_{2017}-1}<1$，所以 $2<3-\dfrac{1}{a_{2015}-1}<3$，

因此 m 的整数部分是 2.

点睛：本题考查了数列的综合应用问题，其中解答中涉及到数列的通项公式，数列的裂项求和，数列的单调性的应用等知识点的综合应用，着重考查了学生分析问题和解答问题的能力，以及推理与运算能力，试题有一定的难度，属于难题，本题的借助数列递推关系，化简数列为 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_n}$，再借助数列的单调性是解答的关键.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$c\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin C$.

（1）求角B;

（2）设BD是AC边上的高，且$BD=1$，$b=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长.

【答案】（1）$B=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$3+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理边化角以及诱导公式化简已知等式，可得$\sin\dfrac{B}{2}$的值，即可求得答案;

（2）根据三角形面积相等可推出$ac=2$，再利用余弦定理即可求得$a+c$的值，即可得答案.

【小问 1 详解】

因为$c\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin C$，

所以$\sin C\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{B}{2}\right)=\sin B\sin C$，

因为$C\in(0,\pi),\sin C\neq 0$，

所以$\cos\dfrac{B}{2}=\sin B$，即$\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$.

因为$\dfrac{B}{2}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，

所以$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，解得$B=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为$B=\dfrac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{3}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}b\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又由$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，可得$\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$ac=2$.

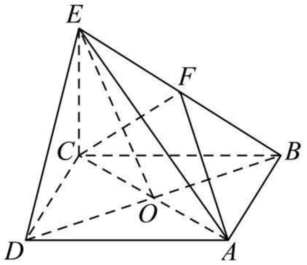
由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{\pi}{3}$，可得$3=a^2+c^2-ac$，即$\left(a+c\right)^2=3+3ac$，

即$\left(a+c\right)^2=3+6=9$，

所以$a+c=3$，

所以$\triangle ABC$的周长为$3+\sqrt{3}$.

18. 如图所示，在四棱锥$E-ABCD$中，底面$ABCD$是菱形，$\angle ADC=60°$，AC与BD交于点O，$EC\perp$底面$ABCD$，F为BE的中点，$AB=CE$.



（1）求证：$DE//$平面ACF;

（2）求AF与平面EBD所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解答

（2）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

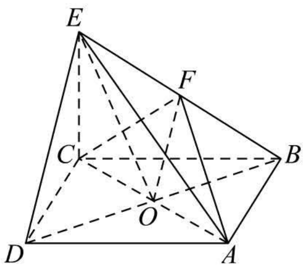
【解析】

【分析】（1）通过证明$OF//DE$，得证$DE//$平面ACF;

（2）建立空间直角坐标系，利用向量法求线面角的正弦值.

【小问1详解】

证明：如图，连接OF，



因为底面$ABCD$是菱形，AC与BD交于点O，可得O点为BD的中点，

又F为BE的中点，所以OF为$\triangle BDE$的中位线，可得$OF//DE$，

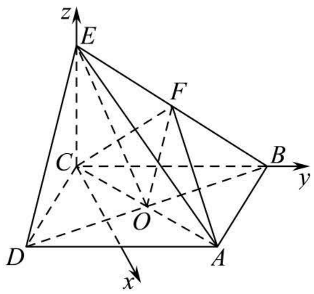
又$OF\subset$平面ACF，$DE\not\subset$平面ACF，

可得$DE//$平面ACF；

【小问 2 详解】

以CB，CE所在直线为y，z轴，过C作CB的垂线所在直线为x轴，建立如图所示的坐标系，

因为$ABCD$是菱形，$\angle ADC=60^\circ$，$\triangle ADC$为等边三角形，



不妨设$AB=CE=2$，则$D\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$B\left(0,2,0\right)$，$E\left(0,0,2\right)$，$A\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$F\left(0,1,1\right)$，

可得$\overrightarrow{DB}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-2,2)$，

设平面EBD的一个法向量为$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，可得$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}x+3y=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}=-2y+2z=0\end{cases}$，

不妨取$y=1$，则$x=\sqrt{3},z=1$，可得$\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,1\right)$.

又$\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{3},0,1)$，

可得AF与平面EBD所成角的正弦值为：$\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{3}\right)+1\times0+1\times1}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2+1^2}\times\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

19. 已知数列$\{a_n\}$是各项都为正整数的等比数列，$a_1=3$,且a_3是a_2与$\frac{3}{4}a_4$的等差中项，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1,b_{n+1}=2b_n+1$.

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式;

（2）若$k\cdot\dfrac{b_n+5}{2}-a_n\geq 8n+2k-24$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$k$的取值范围.

【答案】（1）$a_n=3\times2^{n-1}$，$b_n=2^n-1$；（2）$\left[4,+\infty\right)$.

【解析】

【分析】（1）根据等比数列的性质求得公比，进而得到数列$\{a_n\}$的通项公式；由已知得到数列$\{b_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，求得其通项公式，进而得到数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）等价转化为$\dfrac{k-3}{16}\geq\dfrac{n-3}{2^n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，然后令$f\left(n\right)=\dfrac{n-3}{2^n}$，利用作差法研究单调性，得

到最大值，进而求解得到k的取值范围.

【详解】(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q\in N^*$，

$\because a_3$是a_2与$\frac{3}{4}a_4$的等差中项，$\therefore 2a_3=a_2+\frac{3}{4}a_4$，

$\therefore 2q=1+\frac{3}{4}q^2$，解得$q=2$或$q=\frac{2}{3}$(舍去)，$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$

$\because b_{n+1}=2b_n+1, \therefore b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，

又$b_1+1=2$，$\therefore$数列$\{b_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore b_n+1=2^n, \therefore b_n=2^n-1$；

(2)由$k\cdot\frac{b_n+5}{2}-a_n\ge 8n+2k-24$，

整理可得$k(2^{n-1}+2)-3\times 2^{n-1}\ge 8(n-3)+2k$，即$(k-3)\cdot 2^{n-1}\ge 8(n-3)$，

$\therefore \frac{k-3}{16}\ge\frac{n-3}{2^n}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

令$f(n)=\frac{n-3}{2^n}$，则$f(n+1)-f(n)=\frac{n-2}{2^{n+1}}-\frac{n-3}{2^n}=\frac{(n-2)-2(n-3)}{2^{n+1}}=\frac{4-n}{2^{n+1}}$

$\therefore$当$n\le 4$时，$f(n+1)\ge f(n)$，当$n\ge 5$时，$f(n+1)<f(n)$，

$\therefore$当$n=4$或5时，$f(n)$取得最大值，

$\therefore f(n)_{max}=f(4)=16$

$\therefore \frac{k-3}{16}\ge\frac{1}{16}$.解得$k\ge 4$.

故实数k的取值范围是$[4,+\infty)$.

20. 已知点P到$A(-2,0)$的距离是点P到$B(1,0)$的距离的2倍.

（1）求点P的轨迹方程；

（2）若点P与点Q关于点B对称，过B的直线与点Q的轨迹Γ交于E，F两点，探索$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

【答案】（1）$(x-2)^2+y^2=4$

（2）是定值，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$

【解析】

【分析】(1)设点$P(x,y)$，根据两点坐标求距离公式计算化简即可；

(2)设$Q(x_0,y_0)$，根据中点坐标公式代入圆P方程中可得Q的轨迹方程，直线l的方程、$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，联立圆Q方程，利用韦达定理表示出x_1+x_2,x_1x_2，结合向量数量积的坐标表示化简计算即可；

【小问 1 详解】

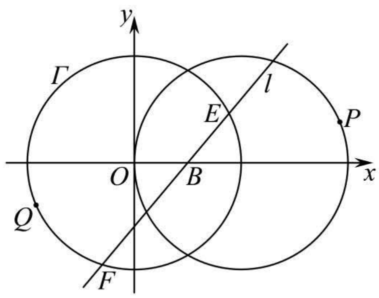
设点$P(x,y)$，由题意可得$|PA|=2|PB|$，即$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，

化简可得$(x-2)^2+y^2=4$.

【小问 2 详解】

设点$Q(x_0,y_0)$，由（1）P点满足方程:$(x-2)^2+y^2=4$，$\begin{cases}x_0+x=2\times1\\y_0+y=0\end{cases}$，

代入上式消去可得$x_0^2+y_0^2=4$，即Q的轨迹方程为$x^2+y^2=4$，



当直线l的斜率存在时，设其斜率为k，则直线l的方程为$y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}x^2+y^2=4\\y=k(x-1)\end{cases}$，消去$y$，得$(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，显然$\Delta>0$，

设$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$则$x_1+x_2=\dfrac{2k^2}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{k^2-4}{1+k^2}$，

又$\overrightarrow{BE}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{BF}=(x_2-1,y_2)$，

则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+y_1y_2=1-(x_1+x_2)+x_1x_2+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$$=(1+k^2)x_1x_2-(1+k^2)(x_1+x_2)+(1+k^2)=(1+k^2)\frac{k^2-4}{1+k^2}-(1+k^2)\frac{2k^2}{1+k^2}+(1+k^2)$$

$$=\frac{k^4-3k^2-4-2k^4-2k^2+k^4+2k^2+1}{1+k^2}=\frac{-3k^2-3}{1+k^2}=-3.$$

当直线l的斜率不存在时，$E(1,\sqrt{3})$，$F(1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$.

故$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$是定值，即$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=-3$.

21. 已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-a\sin x-1\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）当$a=1$时，讨论函数$g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\mathrm{e}^{x}}$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$上的单调性；

（2）当$a=-3$时，证明：对$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，有$f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x}+x+1-2\mathrm{e}^{-2x}$.

【答案】（1）$g\left(x\right)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$单调递减，在$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$单调递增

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由导函数符号变化，分区间讨论单调性；

（2）不等式等价变形，构造函数$F\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}\left(3\sin x-x-2\right)$，求解导函数并利用$x>\sin x$放缩，再结合辅助角公式转化利用有界性判断导函数符号，得到函数单调性证明不等式.

【小问1详解】

当$a=1$时，$g\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\mathrm{e}^{x}}=1-\dfrac{\sin x+1}{\mathrm{e}^{x}}$，

$$g'\left(x\right)=-\frac{\cos x-\sin x-1}{\mathrm{e}^{x}}=-\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\mathrm{e}^{x}}，$$

当$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$时，$-\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4},\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$单调递减；

当$0<x<\dfrac{3\pi}{2}$时，$\dfrac{\pi}{4}<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{7\pi}{4},\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增.

所以$g\left(x\right)$在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$单调递减，在$\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$单调递增.

【小问2详解】

要证$f\left(x\right)<\mathrm{e}^{x}+x+1-2\mathrm{e}^{-2x}$，只要证$3\sin x-x-2<-2\mathrm{e}^{-2x}$，

即证$\mathrm{e}^{2x}\left(3\sin x-x-2\right)<-2$.

令$F\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}\left(3\sin x-x-2\right)$，$F'\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}\left(6\sin x-2x+3\cos x-5\right)$.

当$x>0$时，令$h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x\geq 0$，公众号：高中试卷君

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$，即$x>\sin x$，

从而$-2x<-2\sin x$.

所以$F'(x)=e^{2x}(6\sin x-2x+3\cos x-5)<e^{2x}(6\sin x-2\sin x+3\cos x-5)$，

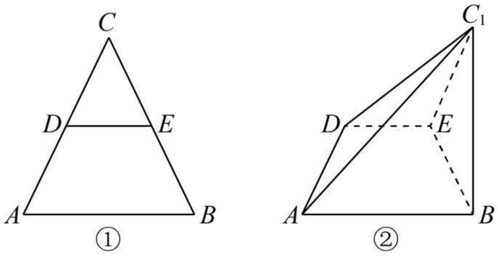
$=e^{2x}(4\sin x+3\cos x-5)=e^{2x}[5\sin(x+\varphi)-5]\leq 0$，

其中，φ为辅助角，且满足$\sin\varphi=\dfrac{3}{5},\cos\varphi=\dfrac{4}{5}$即可.

所以$F(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，即$F(x)<F(0)=-2$.

故$f(x)<e^x+x+1-2e^{-2x}$成立.

22. 如图①，在$\triangle ABC$中，$BC=4,AB=\sqrt{13},\cos B=\dfrac{\sqrt{13}}{13},E,D$分别为$BC,AC$的中点，以$DE$为折痕，将$\triangle DCE$折起，使点$C$到达点$C_1$的位置，且$BC_1=2$，如图②.



（1）设平面$ADC_1\cap$平面$BEC_1=l$，证明：$l\perp$平面ABC_1；

（2）P是棱C_1D的中点，过P,B,E三点作该四棱锥的截面，与C_1A交于点Q，求$\dfrac{AQ}{AC_1}$；

（3）P是棱C_1D上一点（不含端点），过P,B,E三点作该四棱锥的截面与平面BEC_1所成的锐二面角的正切值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求该截面将四棱锥分成上、下两部分的体积之比.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{AQ}{AC_1}=\dfrac{2}{3}$

（3）$\dfrac{4}{5}$

【解析】

【分析】(1) 延长AD,BE交于点C，连接CC_1，确定$CC_1\perp AC_1,CC_1\perp BC_1$得到$CC_1\perp$平面$ABC_1$，得到证明.

(2) 延长AD,BE交于点C，连接CP并延长交AC_1于点Q，连接EP,BQ，平面$EPQB$即为所求截面，根据相似即中位线的性质得到比例关系.

(3) 过C_1作$C_1H\perp BE$，确定$AB\perp EB$，得到$BE\perp$平面AHC_1，得到$\tan\angle C_1HQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，勾股定理计算得到$HC_1\perp AC_1$，$C_1Q=\dfrac{3}{2}$，$Q$为$AC_1$的中点，得到$P$是$\triangle ACC_1$的重心，计算$V_{四棱锥C_1-BQPE}=4V_{三棱锥C-DPE}$，$V_{几何体ABEDQP}=5V_{三棱锥C-DPE}$，得到答案.

【小问1详解】

在图②中延长AD,BE交于点C，连接CC_1，

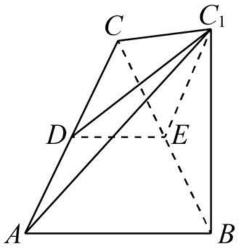
因为E,D分别为BC,AC的中点，所以$CE=C_1E=EB,CD=C_1D=DA$，

所以$\triangle ACC_1,\triangle BCC_1$分别是以$AC,BC$为斜边的直角三角形，

即$CC_1\perp AC_1,CC_1\perp BC_1$，

又$AC_1\cap BC_1=C_1,BC_1\subset$平面$ABC_1,AC_1\subset$平面$ABC_1$，所以$CC_1\perp$平面$ABC_1$，

又平面$ADC_1\cap$平面$BEC_1=l=CC_1$，所以$l\perp$平面ABC_1.



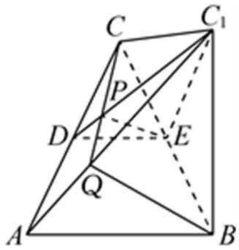
【小问2详解】

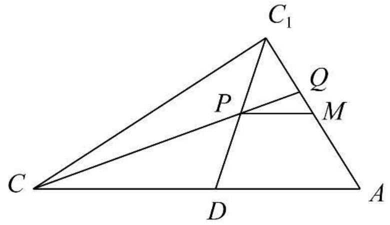
在图②中延长AD,BE交于点C，连接CP并延长交AC_1于点Q，连接EP,BQ，

所以平面$EPQB$即为所求截面，

取M为AC_1的中点，连接PM，则$PM=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{4}AC$，

$\triangle QPM\sim\triangle QCA$，故$\dfrac{QM}{QA}=\dfrac{PM}{AC}=\dfrac{1}{4}$，故$\dfrac{AQ}{AC_1}=\dfrac{4}{2\times(4-1)}=\dfrac{2}{3}$.





【小问 3 详解】

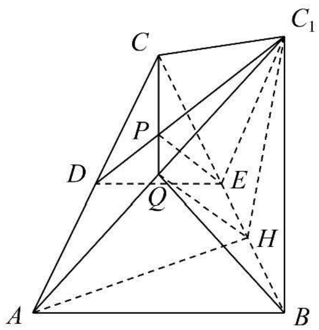
过C_1作$C_1H\perp BE$，因为$C_1E=C_1B$，所以H为EB的中点，所以$BH=1$，

连接AH，因为$AB=\sqrt{13},\cos B=\frac{\sqrt{13}}{13}=\frac{BH}{AB}$，所以$AB\perp EB$，

又$AH\cap C_1H=H,AH\subset$平面$AHC_1,C_1H\subset$平面AHC_1，所以$BE\perp$平面AHC_1，

连接HQ，则$\angle C_1HQ$是截面$EPQB$与平面BEC_1所成二面角的平面角，

即$\tan\angle C_1HQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，



在直角$\triangle BCC_1$中，$BC_1=2,BC=4$，所以$CC_1=2\sqrt{3}$，

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得：

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC,\cos B=13+16-2\times\sqrt{13}\times4\times\frac{\sqrt{13}}{13}=21$，

所以在直角$\triangle ACC_1$中，$AC_1^2=AC^2-CC_1^2=21-12=9$，所以$AC_1=3$，

所以$AH^2=AC_1^2+HC_1^2$，所以$HC_1\perp AC_1$，

因为$\tan\angle C_1HG=\frac{C_1Q}{HC_1}=\frac{C_1Q}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$C_1Q=\frac{3}{2}$，即$Q$为$AC_1$的中点，

又D是AC的中点，所以P是$\triangle ACC_1$的重心，所以$C_1P=\frac{2}{3}C_1D,CP=\frac{2}{3}CQ$，

$\frac{S_{\triangle CPE}}{S_{\triangle CQB}}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，故 $V_{\text{四棱锥}C_1-BQPE}=2V_{\text{三棱锥}C_1-CPE}=4V_{\text{三棱锥}C-DPE}$，

又 $V_{\text{三棱锥}C-AQB}=V_{\text{三棱锥}C-BQC_1}$，

故 $V_{\text{几何体}ABEDQP}=V_{\text{三棱锥}C-ABQ}-V_{\text{三棱锥}C-DPE}=V_{\text{三棱锥}C-BQC_1}-V_{\text{三棱锥}C-DPE}=5V_{\text{三棱锥}C-DPE}$，

所以 $\frac{V_{\text{四棱锥}C_1-BQPE}}{V_{\text{几何体}ABEDQP}}=\frac{4}{5}$.