

2023~2024 学年度上期期末高二年级调研考试

数 学

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)3 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

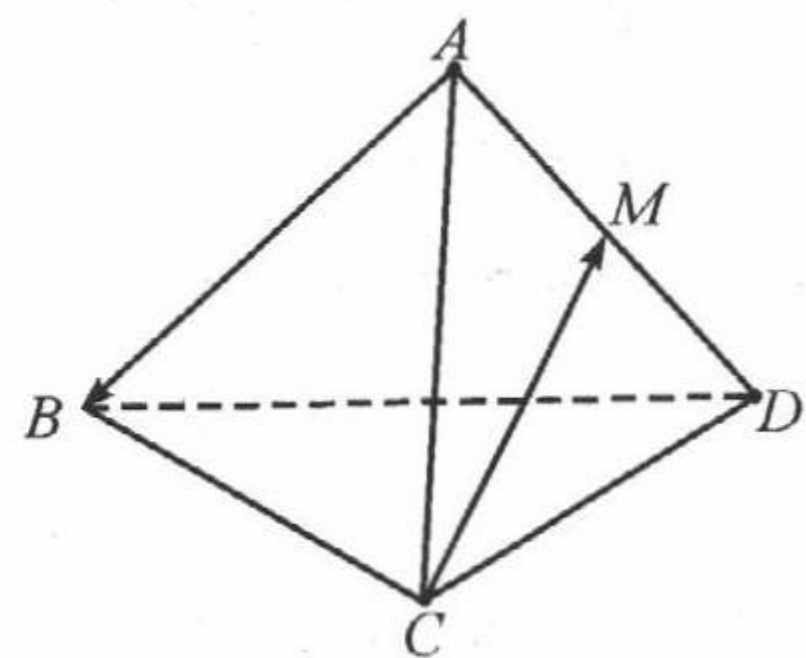
第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中,点  $M(2, -3, 1)$  关于原点对称的点的坐标为  
A.  $(-2, -3, -1)$  B.  $(2, 3, -1)$  C.  $(-2, 3, 1)$  D.  $(-2, 3, -1)$
2. 抛物线  $x^2 = 4y$  的准线方程为  
A.  $y = -1$  B.  $y = -2$  C.  $y = 1$  D.  $y = 2$
3. 据统计,2023 年 12 月成都市某区域一周 AQI 指数按从小到大的顺序排列为:45,50,51,53,53,57,60,则这组数据的 25 百分位数是  
A. 45 B. 50 C. 51 D. 53
4. 圆  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$  与圆  $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 16$  的位置关系是  
A. 相交 B. 内切 C. 外切 D. 内含
5. 已知双曲线的虚轴长是实轴长的  $\sqrt{3}$  倍,且与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  有公共焦点,则该双曲线的标准方程为  
A.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  B.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  C.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$  D.  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$

6. 如图,已知四面体  $ABCD$  的棱长都是 2,点  $M$  为棱  $AD$  的中点,则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}$  的值为

- A. 1
- B. -1
- C. -2
- D. 2



7. 连续两次抛掷一枚质地均匀的骰子,观察它落地时朝上面的点数。

事件  $A_1$  = “第一次得到的数字是 2”; 事件  $A_2$  = “第二次得到的数字是奇数”;  
事件  $A_3$  = “两次得到数字的乘积是奇数”;事件  $A_4$  = “两次得到数字的和是 6”。则

- A. 事件  $A_1$  和事件  $A_2$  对立
- B. 事件  $A_2$  和事件  $A_4$  互斥
- C. 事件  $A_1$  和事件  $A_4$  相互独立
- D.  $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2)$

8. 已知圆  $M: (x-4)^2 + y^2 = 4$ ,点  $P$  为直线  $x-y=0$  上的动点,过点  $P$  作圆  $M$  的两条切线,切点分别为  $A, B$ ,则  $|AB|$  的最小值为

- A.  $2\sqrt{3}$
- B.  $\sqrt{2}$
- C.  $2\sqrt{2}$
- D.  $\sqrt{3}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 在男子跳水 10 米台比赛中,某运动员发挥出色。在他的第一跳中,10 位裁判给出的分数为:9.0,9.1,9.3,9.5,9.5,9.7,9.9,10,10,10,对该组数据下列说法正确的有

- A. 众数为 10
- B. 平均数为 9.5
- C. 极差为 9
- D. 中位数为 9.6

10. 已知  $\triangle ABC$  的顶点  $A(5, 1)$ ,边  $AB$  上的中线  $CM$  所在直线方程为  $2x - y - 5 = 0$ ,边  $AC$  上的高  $BH$  所在直线方程为  $x - 2y - 5 = 0$ ,则下列说法正确的有

- A. 过点  $A$  且平行于  $CM$  的直线的方程为  $2x - y - 9 = 0$
- B. 直线  $AC$  的方程为  $2x + y - 11 = 0$
- C. 点  $C$  的坐标为  $(4, 3)$
- D. 边  $AC$  的垂直平分线的方程为  $x - 2y - 1 = 0$

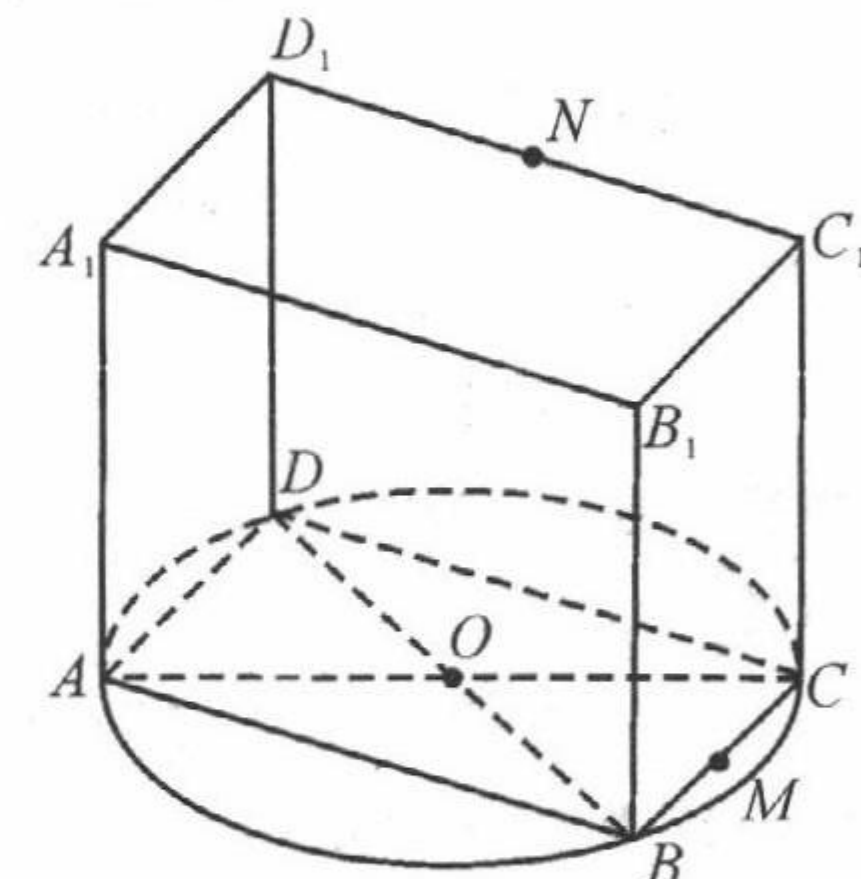
11. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1 (a > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,下列说法正确的有

- A. 若  $a = 3$ ,则双曲线的离心率为  $\frac{5}{3}$
- B. 若双曲线的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ ,则  $a = 2$
- C. 若双曲线的焦距为 10,  $M$  为该双曲线上一点,且  $|MF_1| = 7$ ,则  $|MF_2| = 1$
- D. 若点  $M$  为双曲线上一点,且  $|\overrightarrow{MF_1} - \overrightarrow{MF_2}| = 2|\overrightarrow{MO}|$ ,则  $S_{\triangle F_1MF_2} = 16$

12. 如图,在直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AC = 2\sqrt{2}$ ,  $AA_1 = 2$ ,点  $B, D$  在以线段  $AC$  为直径的圆  $O$  上运动,且  $B, D, O$  三点共线,点  $M, N$  分别是线段  $BC, C_1D_1$  的中点,下列说法中正确的有

- A. 存在点  $B$ ,使得平面  $ABC_1$  与平面  $BB_1C_1C$  不垂直
- B. 当直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积最大时,直线  $A_1C$  与直线  $AB_1$  垂直
- C. 当  $AB = 2$  时,过点  $A_1, B, N$  的平面截该四棱柱所得的截面周长为  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$

- D. 当  $AB = 2$  时,过  $MN$  的平面截该四棱柱的外接球,所得截面面积的最小值为  $\frac{5\pi}{2}$

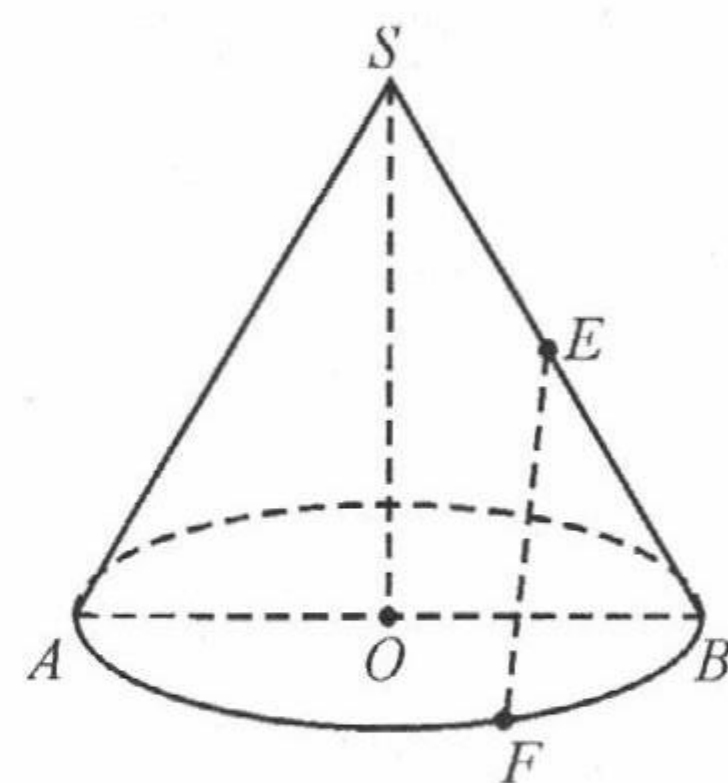


## 第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡上.

13. 某校高二年级选择“理化生”,“理化地”,“史政地”和“史政生”组合的学生人数分别为 480,40,120 和 80,现采用分层抽样的方法从这些学生中选出 72 人参加一项活动,则“史政生”组合中选出的学生人数为\_\_\_\_\_.

14. 如图所示,圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形,  $F$  为  $\widehat{AB}$  的中点,  $E$  为  $SB$  的中点,则直线  $SA$  与  $EF$  所成角的大小为\_\_\_\_\_.



15. 九宫格的起源可以追溯到远古神话中的洛书,洛书上的图案正好对应着从 1 到 9 九个数字,并且纵向、横向、斜向三条线上的三个数字的和(这个和叫做幻和)都等于 15,即现代数学中的三阶幻方.根据洛书记载:“以五居中,五方皆为阳数,四隅为阴数”,其意思为:九宫格中 5 位于居中位置,四个顶角为偶数,其余位置为奇数.如图所示,若随机填写一组幻和等于 15 的九宫格数据,记事件  $A = “a + b \geq 9”$ ,则  $P(A)$  的值为\_\_\_\_\_.

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $d$ | $f$ |
| $b$ | 5   | $g$ |
| $c$ | $e$ | $h$ |

16. 已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 动点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  均在椭圆上,  $O$  是坐标原点,记  $OP$  和  $OQ$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ ;  $\triangle OBP$  与  $\triangle OAQ$  的面积分别为  $S_1, S_2$ . 若  $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$ , 则  $S_1 S_2$  的最大值为\_\_\_\_\_.

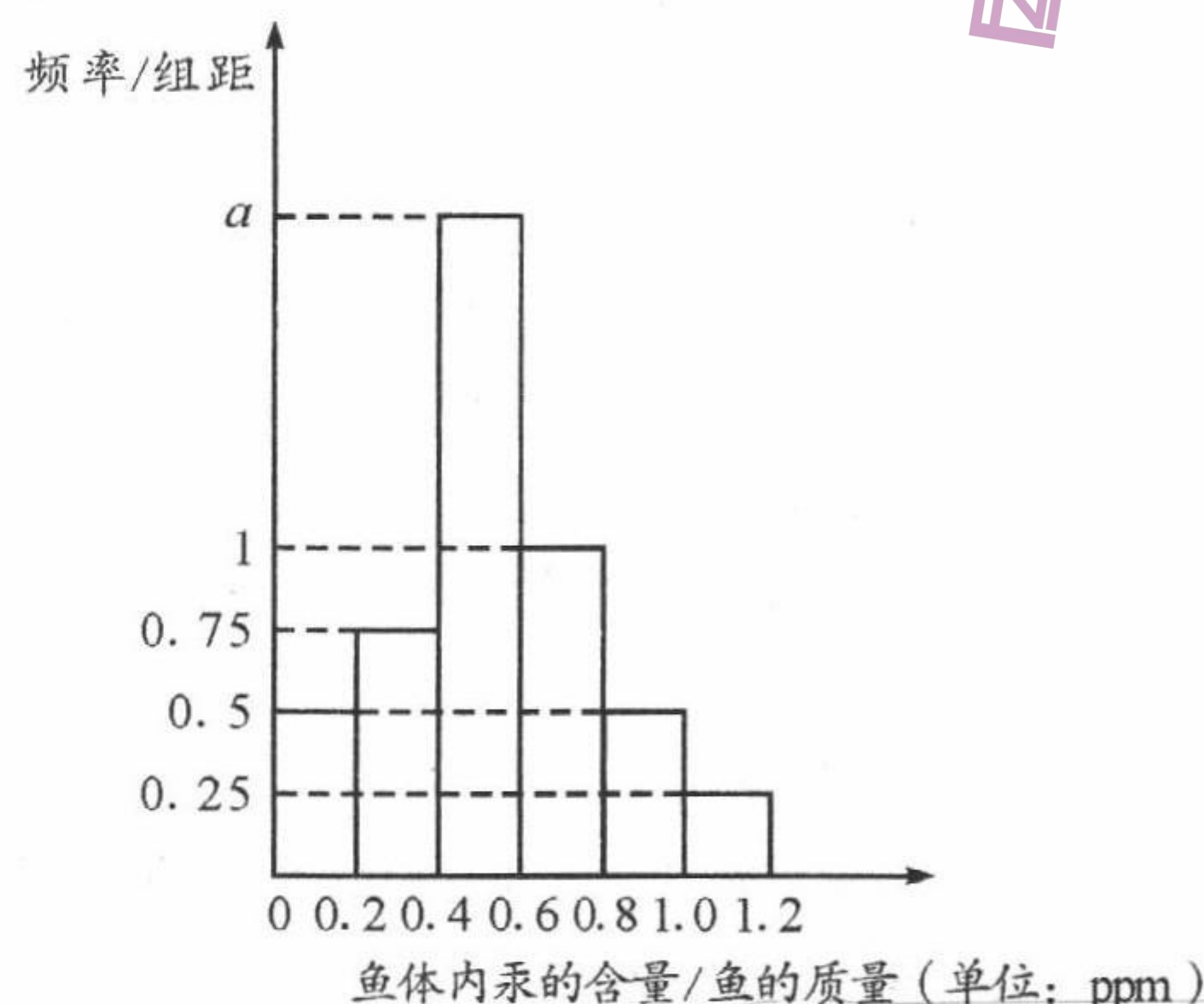
四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

为保障食品安全,某质量监督检验中心从当地海鲜市场的 10000 条鱼中随机抽取了 100 条鱼来测量其体内汞的含量,测量指标为:  $\frac{\text{鱼体内汞的含量}}{\text{鱼的质量}}$  (单位:ppm). 将所得数据分组后,画出了如图所示的频率分布直方图.

(I) 求频率分布直方图中  $a$  的值,并估计该样本的中位数;

(II) 已知当鱼体内汞含量的测量指标超过 1ppm 时,就不符合可食用标准.用样本估计总体,求这一批鱼中约有多少条不符合可食用标准.



18. (本小题满分 12 分)

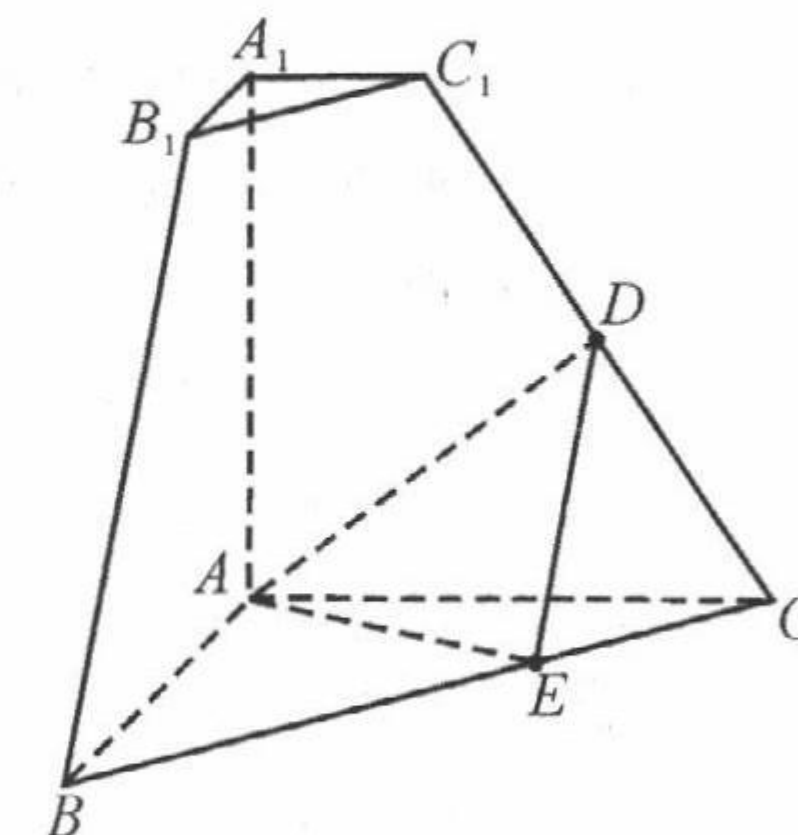
已知  $A(2,4), B(-1,1)$ ,  $O$  为坐标原点,圆  $C$  为  $\triangle AOB$  的外接圆.

(I) 求圆  $C$  的标准方程;

(II) 过原点的直线  $l$  被圆  $C$  截得的弦长为  $3\sqrt{2}$ , 求直线  $l$  的方程.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱台  $ABC-A_1B_1C_1$  中,若  $A_1A \perp$  面  $ABC$ ,  $AB \perp AC$ ,  $AB = AC = AA_1 = 3, A_1C_1 = 1$ , 空间中  $D, E$  两点分别满足  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .



(I) 证明:  $DE \parallel$  平面  $ABB_1A_1$ ;

(II) 求平面  $ABB_1A_1$  与平面  $ADE$  的夹角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中,动点  $M$  与点  $F_2(1,0)$  的距离和它到直线  $x=4$  的距离之比是  $1:2$ .

(I) 求动点  $M$  的轨迹方程;

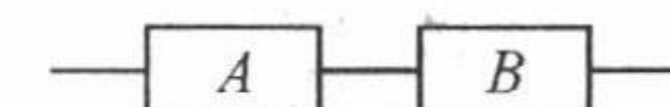
(II) 过点  $F_2$  的直线  $l$  与点  $M$  的轨迹交于  $A, B$  两点,与直线  $x=4$  交于点  $P$ ,若  $\frac{|AB|}{|PF_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$ ,

求  $l$  的方程.

21. (本小题满分 12 分)

某企业为了推动技术革新,计划升级某电子产品,该电子产品核心系统的某个部件  $G$  由 2 个电子元件组成. 如图所示,部件  $G$  是由元件  $A$  与元件  $B$  组成的串联电路,已知元件  $A$  正常工作的概率为  $\frac{2}{3}$ , 元件  $B$  正常工作的概率为  $\frac{4}{5}$ , 且元件  $A, B$  工作是相互独立的.

(I) 求部件  $G$  正常工作的概率;



(II) 为了促进产业革新,该企业计划在核心系统中新增两个另一产地的电子元件,使得部件  $G$  正常工作的概率增大. 已知新增元件正常工作的概率为  $p(0.8 \leq p < 1)$ , 且四个元件工作是相互独立的. 现设计以下三种方案:

方案一: 新增两个元件都和元件  $A$  并联后,再与  $B$  串联;

方案二: 新增两个元件都和元件  $B$  并联后,再与  $A$  串联;

方案三: 新增两个元件,其中一个和元件  $A$  并联,另一个和元件  $B$  并联,再将两者串联.

则该公司应选择哪一个方案,可以使部件  $G$  正常工作的概率达到最大?

22. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上一点  $D$  到焦点  $F$  的距离为 3, 点  $D$  到  $y$  轴的距离恰为  $p$ .

(I) 求点  $D$  的坐标;

(II) 过点  $M(5, -2)$  的直线与抛物线相交于  $A, B$  两点, 抛物线上是否存在一定点  $P$ , 使得点  $P$  始终在以线段  $AB$  为直径的圆上? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.