2023～2024 学年度上期期末高二年级调研考试

数学参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、单选题:(每小题 5 分,共 40 分)

1.D; 2.A; 3.B; 4.C; 5.A; 6.B; 7.D; 8.C.

二、多选题:(每小题 5 分,共 20 分)

9.AD; 10.ABC; 11.ABD; 12.BCD.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

三、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13.8; 14. $\frac{\pi}{4}$; 15. $\frac{3}{4}$; 16. $\frac{2}{3}$.

四、解答题:(共 70 分)

17.**解:**(Ⅰ)由 $0.2\times(0.5+0.75+a+1+0.5+0.25)=1$,解得 $a=2$. ……3 分

因为 $(0.5+0.75)\times0.2=0.25<0.5$,$(0.5+0.75+2)\times0.2=0.65>0.5$,

所以中位数位于 $[0.4,0.6)$.

所以中位数为:$0.4+\frac{0.5-0.25}{2\times0.2}\times0.2=0.525$. ……6 分

(Ⅱ)由题意,抽取的 100 条鱼测量指标超过 1ppm 的频率为 $0.25\times0.2=0.05$.

……8 分

由样本的频率分布,估计 10000 条鱼中不符合可食用标准有 $10000\times0.05=500$(条).

所以用样本估计总体,这一批鱼中约有 500 条不符合可食用标准. ……10 分

18.**解:**(Ⅰ)设△AOB 的外接圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

∵A,B,O 均在圆 C 上.

$$\therefore\begin{cases}4+16+2D+4E+F=0,\\1+1-D+E+F=0,\\F=0.\end{cases}$$ ……3 分

解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=-4,\\F=0.\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-2x-4y=0$. ……5 分

所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$. ……6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知圆心 $C(1,2)$,半径为$\sqrt{5}$,因为直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $3\sqrt{2}$,

所以点 C 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{5-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……8 分

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx$,

则$\frac{|k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,两边同时平方得$\frac{k^2-4k+4}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,解得 $k=1$ 或 $k=7$. ……11 分

当直线 l 的斜率不存在时,不满足条件.

所以直线 l 的方程为 $x-y=0$ 或 $7x-y=0$. ……12 分

19. **解**:(Ⅰ)$\because \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore D$ 是 CC_1 的中点,E 是 BC 靠近 C 的三等分点. ……3 分

如图所示,过点 D 作 $DM/\!/AC$ 交 AA_1 于 M,过点 E 作 $EN/\!/AC$ 交 AB 于 N,连接 MN.

则 $DM=\frac{2}{3}AC=EN$,$DM/\!/EN$,

$\therefore$四边形 $DMNE$ 是平行四边形.

$\therefore DE/\!/MN$. ……5 分

$\because MN\subset$平面 ABB_1A_1,$DE\not\subset$ 平面 ABB_1A_1,

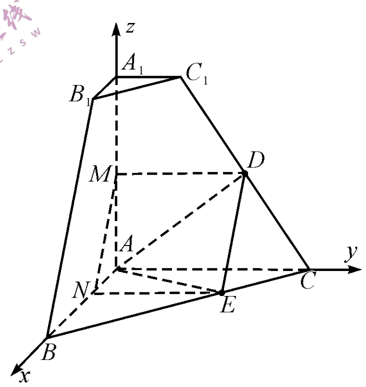
$\therefore DE/\!/$平面 ABB_1A_1. ……6 分

(Ⅱ)$\because$ $AA_1\perp$平面 ABC,

$\therefore$ $AA_1\perp AB$,$AA_1\perp AC$.

又因为 $AB\perp AC$,所以 AB,AC,AA_1 两两互相垂直.

以 A 为坐标原点,AB,AC,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $Axyz$.



则 $A(0,0,0)$,$C(0,3,0)$,$D(0,2,\frac{3}{2})$,$E(1,2,0)$,

$\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$,$\overrightarrow{AD}=(0,2,\frac{3}{2})$,$\overrightarrow{AE}=(1,2,0)$.

……8 分

取平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$. ……9 分

设平面 ADE 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,平面 ABB_1A_1 与平面 ADE 的夹角为θ,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2y+\frac{3}{2}z=0,\\ x+2y=0.\end{cases}$

令 $z=4$,得 $\boldsymbol{m}=(6,-3,4)$. ……11 分

$\therefore$ $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right|=\left|\frac{-9}{3\cdot\sqrt{61}}\right|=\frac{3\sqrt{61}}{61}$.

所以，平面 ABB_1A_1 与平面 ADE 的夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{61}}{61}$.　　……12 分

20. **解**：(Ⅰ)设点 $M(x,y)$，由题意可得：$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|4-x|}=\dfrac{1}{2}$，　　……2 分

将上式两边平方，并化简，得 $3x^2+4y^2=12$，即$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

故点 M 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　……4 分

(Ⅱ)当直线 l 斜率为 0 时，由题有 $|AB|=4$，$|PF_2|=3$，不合题意.　　……5 分

当直线 l 斜率不为 0 时，设 $l:x=my+1(m\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $P(4,\dfrac{3}{m})$，

由$\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)=144(m^2+1)>0$.

$y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$.　　……7 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\dfrac{\sqrt{144(m^2+1)}}{3m^2+4}=\dfrac{12(m^2+1)}{3m^2+4}$.

$|PF_2|=\sqrt{1+m^2}\,|y_P|=\dfrac{3\sqrt{m^2+1}}{|m|}$.　　……9 分

$\therefore \dfrac{|AB|}{|PF_2|}=\dfrac{4|m|\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.

化简得 $31m^4+m^2-32=0$，　　……10 分

解得 $m^2=1$ 或 $m^2=-\dfrac{32}{31}$（舍去）.

解得 $m=\pm 1$.

所以，直线 l 的方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$.　　……12 分

21. **解**：(Ⅰ)记事件 A_1，B_1 分别表示元件 A，B 正常工作，则 $P(A_1)=\dfrac{2}{3}$，$P(B_1)=\dfrac{4}{5}$，

……2 分

事件 E 表示 G 正常工作，由元件 A，B 工作是相互独立的.

则 $P(E)=P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{15}$.　　……4 分

(Ⅱ)设方案一、二、三正常工作的概率分别为 P_1，P_2，P_3，设新增的两个元件为元件 C，D，记事件 C_1，D_1 分别表示新增的两个元件正常工作，则 $P(C_1)=P(D_1)=p$.

事件 $\overline{A}_1$，$\overline{B}_1$，$\overline{C}_1$，$\overline{D}_1$ 分别表示元件 A，B，C，D 不正常工作，由于四个元件工作相互独立，则 $P_1=P[(A_1\cup C_1\cup D_1)B_1]=P(A_1\cup C_1\cup D_1)P(B_1)$

$=[1-P(\bar{A}_1\bar{C}_1\bar{D}_1)]P(B_1)=[1-P(\bar{A}_1)P(\bar{C}_1)P(\bar{D}_1)]P(B_1)$.

所以 $P_1=\left[1-\frac{1}{3}\times(1-p)^2\right]\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}-\frac{4}{15}(1-p)^2$； ……6 分

同理得：$P_2=\frac{2}{3}\times[1-\frac{1}{5}(1-p)^2]=\frac{2}{3}-\frac{2}{15}(1-p)^2$； ……8 分

$P_3=[1-\frac{1}{3}(1-p)]\times[1-\frac{1}{5}(1-p)]=\frac{1}{15}(p+2)(p+4)$. ……10 分

又因为 $0.8\leqslant p<1$，$P_1-P_2=\frac{2}{15}-\frac{2}{15}(1-p)^2>0$，

$P_1-P_3=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{15}p=\frac{1}{15}p(-5p+2)<0$，

所以选择方案三可以使部件 G 正常工作的概率最大. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)设 $D(x_0,y_0)$，焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，由题可知 $\begin{cases}x_0+\frac{p}{2}=3,\\ x_0=p\end{cases}$， ……2 分

解得 $x_0=p=2$，所以 $y_0^2=8$，所以点 D 的坐标为 $(2,\pm2\sqrt{2})$. ……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知抛物线的方程为 $y^2=4x$，设 $A(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，$P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，

因为直线 AB 的倾斜角不为 0，设直线 AB 的方程为：$x-5=t(y+2)$，

由 $\begin{cases}x-5=t(y+2)\\ y^2=4x\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4ty-(8t+20)=0$.

$\Delta=16t^2+4(8t+20)=16(t^2+2t+5)>0$

则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-(8t+20)$. ……6 分

由以线段 AB 为直径的圆与该抛物线交于点 $P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，

当 P 与 A,B 之一重合时，满足题意；

当 P 与 A,B 均不重合时，则 PA,PB 的斜率均存在，记为 k_1,k_2，且满足 $k_1\cdot k_2=-1$.

$k_1=\dfrac{y_1-y_0}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_0^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_0}$，同理 $k_2=\dfrac{4}{y_2+y_0}$， ……8 分

所以 $k_1\cdot k_2=\dfrac{4}{y_1+y_0}\cdot\dfrac{4}{y_2+y_0}=\dfrac{16}{y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2}=-1$.

即 $y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2+16=0$. ……10 分

又因为 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-(8t+20)$，

所以 $-8t-20+4ty_0+y_0^2+16=0$. 整理得：$4t(y_0-2)+y_0^2-4=0$.

当 $y_0=2$ 时，上式恒成立，P 为定点.

所以存在抛物线上的定点 $P(1,2)$ 始终在以线段 AB 为直径的圆上. ……12 分