2023 年宜荆荆随恩高三 12 月联考

数学参考答案及评分细则

选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	B	D	A	C	D	C	AC	BD	ABC	ACD

1.【答案】B.

由 $N=\{x\,|\,2x^2-x-3>0\}=\{x\,|\,(2x-3)(x+1)>0\}=\{x\,|\,x<-1或x>\frac{3}{2}\}$ 得 $C_R N=[-1,\frac{3}{2}]$，所以 $M\cap(C_R N)=(0,\frac{3}{2}]$

2.【答案】A.

由复数 z 为纯虚数，可设 $z=bi$（$b\in R$ 且 $b\neq 0$），所以 $\frac{3+z}{2-z}=\frac{3+bi}{2-bi}=\frac{(3+bi)(2+bi)}{4+b^2}$ $=\frac{6-b^2}{4+b^2}+\frac{5b}{4+b^2}i$，因为 $\frac{3+z}{2-z}$ 是纯虚数，所以 $\begin{cases}\frac{6-b^2}{4+b^2}=0\\ \frac{5b}{4+b^2}\neq 0\end{cases}$，解得 $b^2=6$, 所以 $z\bar{z}=|z|^2=b^2=6$.

3.【答案】B.

由题意知，x^3 的系数为 $4\times C_5^3\times(-2)^3-m\times C_5^2\times(-2)^2=-320-40m=-600$，解得 $m=7$，故选 B.

4.【答案】D.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，满足 $f(|x|)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故排除 A;当 $-1<x<0$ 时，$\frac{1}{x}-x<0,\ln x^2<0$,所以 $f(x)=(\frac{1}{x}-x)\ln x^2>0$，故排除 B,C.故选 D.

5.【答案】A.

不妨设 A 在第一象限，由 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{2}b\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得 $x=\pm\frac{a}{2}$，所以 $A(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b),B(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b)$，所以 $|AB|=a$，记椭圆 E 的左焦点为 F_1，由对称性可知四边形 ABF_1F 为等腰梯形，所以 $|BF|=|AF_1|$，所以 ΔABF 的周长等于 $|AF|+|BF|+|AB|=|AF|+|AF_1|+|AB|=2a+a=3a=4c$，所以椭圆 E 的离心率等于 $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$.

6.【答案】C.

因为函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在 $(1,2)$ 上是单调递增函数，所以 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\geq 0$ 对任意 $x\in(1,2)$ 恒成立，所以 $a\geq\frac{1}{xe^x}$，令 $g(x)=\frac{1}{xe^x}$（$x\in(1,2)$），$g'(x)=-\frac{x+1}{x^2e^x}<0$，所以 $g(x)$ 为减函数，所以 $g(x)<g(1)=\frac{1}{e}$，所以 $a\geq\frac{1}{e}$.

7.【答案】D.

因为$\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta-\beta)=2\sin(\alpha+\beta)$，所以$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$，

化简得$\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta-2)=\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$,所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-2}$，又$2\sin\beta-\cos\beta+2=0$，

所以$\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta-2}=\dfrac{1}{2}$，故$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$.

8.【答案】C.

解法一：通项法：若$S_2>0$，则$a_1+a_2=a_1(1+q)>0$，所以$\begin{cases}a_1>0\\q>-1\end{cases}$或$\begin{cases}a_1<0\\q<-1\end{cases}$，$S_{2n}=\dfrac{a_1}{1-q}(1-q^{2n})$.

①若$\begin{cases}a_1>0\\q>-1\end{cases}$，当$-1<q<1$时，$\dfrac{a_1}{1-q}>0$，$f(n)=1-q^{2n}=1-|q|^{2n}$是递增数列，所以$\{S_{2n}\}$是递增数列；当$q>1$时，$\dfrac{a_1}{1-q}<0$，$f(n)=1-q^{2n}$是递减数列，所以$\{S_{2n}\}$是递增数列.

②若$\begin{cases}a_1<0\\q<-1\end{cases}$，$\dfrac{a_1}{1-q}<0$，$f(n)=1-q^{2n}=1-|q|^{2n}$是递减数列，所以$\{S_{2n}\}$是递增数列.

所以“$S_2>0$”是“数列$\{S_{2n}\}$是单调递增数列”的充分条件.

若$\{S_{2n}\}$是单调递增数列，则$S_4>S_2$，所以$S_4-S_2=a_3+a_4=(a_1+a_2)q^2=S_2\cdot q^2>0$，因为$q^2>0$，

所以$S_2>0$，所以“$S_2>0$”是“数列$\{S_{2n}\}$是单调递增数列”的必要条件.

由上可知：“$S_2>0$”是“数列$\{S_{2n}\}$是单调递增数列”的充要条件.

解法二：定义法，若$\{S_{2n}\}$是单调递增数列，则$S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+2}+a_{2n+1}=(a_1+a_2)q^{2n}>0$，所以$S_2=a_1+a_2>0$.

9.【答案】AC.

设圆锥的底面半径为r，母线长为l，因为圆锥的侧面展开图是半径为2的半圆，所以$\begin{cases}l=2\\2\pi r=\dfrac{1}{2}\cdot2\pi\times2\end{cases}$，

所以$\begin{cases}l=2\\r=1\end{cases}$，所以圆锥的高$h=\sqrt{3}$，所以圆锥的体积$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$，A正确。设过顶点的截面三角形顶角为$\theta$，则$0<\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，则截面面积$S=\dfrac{1}{2}l^2\sin\theta=2\sin\theta\le2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，B错误。记圆锥的轴截面为$\Delta ABC$，则$\Delta ABC$是边长为2等边三角形，圆锥外接球和内切球的半径分别是ΔABC外接圆

和内切圆的半径，依次为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以外接球体积等于$\frac{4}{3}\pi\times(\frac{2\sqrt{3}}{3})^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$，C 正确。内切球的表面积等于$4\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2=\frac{4\pi}{3}$，D 错误。

10.【答案】BD.

由抛物线方程可知抛物线准线是$l:x=-1$，A 错误。当$m=n=1$时，ΔPQF 的周长

$L=PQ+PF+1=d_1+d_{P-l}+1\ge d_{Q-l}+1=3$，B 正确。因为$(m-3)^2+n^2=1$，所以$Q(m,n)$在圆上，

圆心为$M(3,0)$，所以$d_1\ge|PM|-1$，设$P(\frac{t^2}{4},t)$，则$|PM|^2=(\frac{t^2}{4}-3)^2+t^2=\frac{1}{16}(t^2-4)^2+8\ge8$，所以

$|PM|\ge2\sqrt{2}$，所以d_1的最小值等于$2\sqrt{2}-1$，C 错误。若$m-n=-4$，则$Q(m,n)$在直线$l_1:x-y+4=0$

上，$d_1+d_2=d_1+|PF|-1\ge d_{F-l_1}-1=\frac{5\sqrt{2}}{2}-1$，D 正确

11.【答案】ABC.

A 选项：因为$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为$0<x_1<x_2$，所以$0<f(x_1)<f(x_2)$，

所以$x_1f(x_1)<x_2f(x_2)$，A 正确；

B 选项：因为$0<x_1<1<x_2$，且$x_1x_2=1$，所以$x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，所以$x_2>2-x_1>0$，因为$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x_2)>f(2-x_1)$，所以 B 正确；

C 选项：令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$（$x>0$），$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为

$0<x_1<x_2$，所以$g(x_1)<g(x_2)$，所以$\frac{f(x_1)}{e^{x_1}}<\frac{f(x_2)}{e^{x_2}}$，因为$f(x)>0$，所以$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=e^{x_1-x_2}$，所

以$\ln\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<\ln e^{x_1-x_2}$，所以$\ln f(x_1)-\ln f(x_2)<x_1-x_2$，C 正确；

D 选项：由 B 可知$\frac{f(x_1)}{e^{x_1}}<\frac{f(x_2)}{e^{x_2}}$，所以$f(x_2)>\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}f(x_1)=e^{\frac{1}{x_1}-x_1}f(x_1)$，取$x_1=\frac{1}{2}$，此时$2-x_1=\frac{3}{2}$，

$e^{\frac{1}{x_1}-x_1}=e^{\frac{3}{2}}>\frac{3}{2}=2-x_1>0$，所以$f(x_2)>\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}f(x_1)=e^{\frac{1}{x_1}-x_1}f(x_1)>(2-x_1)f(x_1)$，D 错误.

12.【答案】ACD.

因为对立事件是互斥事件，所以 A 正确；$P(A_2)=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$，所以 B 错；由全概率公式可知$P(A_{n+1})=P(A_{n+1}/A_n)\cdot P(A_n)+P(A_{n+1}/\overline{A_n})\cdot P(\overline{A_n})=(1-p)P(A_n)+p(1-P(A_n))$

$=(1-2p)P(A_n)+p$，所以 C 正确；由 C 可知 $P(A_{n+1})-\frac{1}{2}=(1-2p)(P(A_n)-\frac{1}{2})$，因为

$P(A_1)-\frac{1}{2}=1-p-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-p\neq 0$，所以 $\{P(A_n)-\frac{1}{2}\}$ 是以 $\frac{1}{2}-p$ 为首项，$1-2p$ 为公比的等比数列，所以 $P(A_n)-\frac{1}{2}=(\frac{1}{2}-p)(1-2p)^{n-1}=\frac{1}{2}(1-2p)^n$，所以 $P(A_n)=\frac{1}{2}(1-2p)^n+\frac{1}{2}$，所以

$P(A_{2n})=\frac{1}{2}(1-2p)^{2n}+\frac{1}{2}$，因为 $0<p<1$ 且 $p\neq\frac{1}{2}$，所以 $1-2p\in(-1,0)\cup(0,1)$，所以 $(1-2p)^2\in(0,1)$，

所以 $P(A_{2n})=\frac{1}{2}(1-2p)^{2n}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}[(1-2p)^2]^n+\frac{1}{2}$ 是关于 n 的递减数列，所以 $P(A_{2n})>P(A_{2n+2})$，D 正确.

填空题： 13: $2\sqrt{3}$　　14: $2\sqrt{2}$　　15: $\frac{64000}{81}$　　16: $(3,\frac{19}{6}]$

13.【答案】$2\sqrt{3}$.

由 $\vec{b}=(1,1)$ 得 $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，由 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 90^0，得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，又 $|\vec{a}|=2$，所以

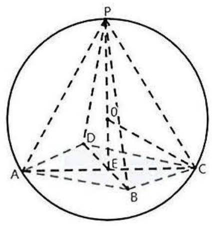
$(\vec{a}+2\vec{b})^2=\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=4+8=12$，所以 $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$.

14.【答案】$2\sqrt{2}$.

由圆的性质可知，当点 A 是弦 PQ 的中点时，|PQ|最短，此时 $(\frac{|PQ|}{2})^2=r^2-|OA|^2=4-2=2$，所以

$|PQ|=2\sqrt{2}$

15.【答案】$\frac{64000}{81}$.



如图所示，记四棱锥为 $P-ABCD$ 外接球球心为 O，半径为 R，底面 $ABCD$ 的外接圆半径为 r，圆心为 E，P 到底面的距离为 d，因为

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\times|BD|\times\sin\theta\leq\frac{1}{2}\times(2r)\times(2r)\times1=2r^2$（其中 θ 是 AC、BD 的夹角），$h\leq R+|OE|$，所以 $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h\leq\frac{1}{3}\times 2r^2(R+|OE|)$，等号成立时，$ABCD$ 为正方形且 P、O、E 共线，即 $P-ABCD$ 为正四棱锥。由题可知 $R=10$，

$r^2=R^2-(h-R)^2=100-(h-10)^2=-h^2+20h$，所以 $P-ABCD$ 的体积

$V=\frac{1}{3}\times 2r^2h=\frac{2}{3}(-h^2+20h)h=-\frac{2}{3}h^3+\frac{40}{3}h^2$（$0<h<20$），因为 $V'=-2h^2+\frac{80}{3}h=0$ 得 $h=\frac{40}{3}$，

$0<h<\frac{40}{3}$ 时，$V'>0$，$\frac{40}{3}<h<20$ 时，$V'<0$，所以 V 在 $(0,\frac{40}{3})$ 上单调递增，在 $(\frac{40}{3},20)$ 上单调递减，所以当 $h=\frac{40}{3}$ 时，$V_{\max}=\frac{1}{3}\times(\frac{40}{3})^2\times(40-2\times\frac{40}{3})=\frac{64000}{81}$

16.【答案】$(3,\frac{19}{6}]$.

由 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+1$ 的图象经过原点，得 $f(0)=2\sin\varphi+1=0$，即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$.因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，由 $f(x)+f(2x_i-x)=2$ 可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(x_i,1)$ 对称，所以 $2\sin(\omega x_i-\frac{\pi}{6})+1=1$.

即$\sin(\omega x_i-\frac{\pi}{6})=0$.当$x\in(0,\pi)$时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6})$，根据$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{6},+\infty)$上的前4个零点依次为$0,\pi,2\pi,3\pi$，可得$2\pi<\omega\pi-\frac{\pi}{6}\le 3\pi$，解得$\frac{13}{6}<\omega\le\frac{19}{6}$，对任意$\alpha$，使得$f(x)$在$(\alpha,\alpha+\frac{\pi}{3})$上不是单调函数，则$\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{\omega}$，解得$\omega>3$.综上，$3<\omega\le\frac{19}{6}$.

17.解：（1）由题意及正弦定理得$\sqrt{3}\sin C\cos A+\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin B$.（1分）

又$A+B+C=\pi$，所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以$\sqrt{3}\sin C\cos A+\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C$，

所以$\sin C\sin A-\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，又$\sin A>0$，所以$\sin C-\sqrt{3}\cos C=0$，则$\tan C=\sqrt{3}$.（3分）

又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{3}$.（4分）

（2）因为CD平分$\angle ACB$，所以$\angle ACD=\angle BCD=\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD}=\frac{b}{a}$

又$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AD}{BD}=2$，所以$\frac{b}{a}=2$，且$AD=\frac{2c}{3}$，$BD=\frac{c}{3}$.（6分）

在ΔABC中，$\cos\angle ACB=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5a^2-c^2}{4a^2}=\frac{1}{2}$①.

在ΔACD中，$\cos\angle ACD=\frac{CD^2+b^2-AD^2}{2b\times CD}=\frac{4+4a^2-\left(\frac{2c}{3}\right)^2}{8a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$②.

由①②得$\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\\c=\frac{3}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}a=\sqrt{3}\\c=3\end{cases}$（8分）

当$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\frac{3}{2}$时，$BC+BD=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}<2=CD$，不符合题意.

当$a=\sqrt{3}$，$c=3$时，符合题意，此时$b=2a=2\sqrt{3}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{ab\sin\angle ACB}{2}=\frac{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.（10分）

思路二：得到$\frac{b}{a}=2$后，利用$S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BCD}=S_{\Delta ABC}$直接求出$BC=\sqrt{3}$.（可酌情给分）

18.解:（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.因为$a_4=a_1+2a_2$，所以$a_1+3d=3a_1+2d$,即$d=2a_1$，（1分）

因为$S_5=3S_3-2$,所以$5a_1+10d=3(3a_1+3d)-2$,即$d=4a_1-2$.由$\begin{cases}d=2a_1\\d=4a_1-2\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$,（4分）

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1,S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n+\frac{n(n-1)\times2}{2}=n^2$.（6分）

（2）由（1）知$a_n=2n-1,S_n=n^2$.假设存在正整数m,k,使得$a_m,4S_k,S_{k+1}$成等比数列，则

$a_mS_{k+1}=16S_k^2$,即$(2m-1)\cdot(k+1)^2=16k^4$，（7分）

所以$2m-1=\frac{16k^4}{(k+1)^2}=\left(\frac{4k^2-4+4}{k+1}\right)^2=\left(4k-4+\frac{4}{k+1}\right)^2$，（9分）

因为$2m-1$是奇数，所以$4k-4+\frac{4}{k+1}$是奇数，即$\frac{4}{k+1}$必为奇数，所以$k=3$,则$2m-1=81$,即$m=41$,

所以当$m=41,k=3$时，$a_m,4S_k,S_{k+1}$成等比数列.（12分）

19.解：（1）$0.1+0.17+10\times m+0.03=0.5$，$m=0.02$，$\therefore n=0.013$.（3分）

（2）通过直方图可知第85百分位数x_0落在第$[40,50)$组，$0.1+0.17+0.2+0.3+(x_0-40)\times0.013=0.85$，

解得$t_0\approx46.15$，因为$t_0\in Z$，所以$t_0=46$，（7分）

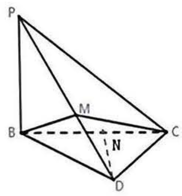
（3）按分层抽样在$[20,30)$组抽取40人记为x_1，x_2，$\cdots$，x_{40}，

则$\frac{1}{40}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{40}^2\right)-900=36$，$\therefore x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_{40}^2=936\times40$，（8分）

在$[30,40)$组抽取60人，记为y_1，$y_2\cdots\cdots y_{60}$，同理可得$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{60}^2=416\times60$，（9分）

平均值为$\bar{x}=\frac{40\times30+60\times20}{100}=24$，（10分）$\therefore$抽取的100名学生每天花在电子产品上的时间的方差

$S^2=\frac{1}{100}(936\times40+416\times60)-24^2=624-576=48$.（12分）



20.解：（1）过D作DN⊥BC，垂足为N，因为平面BCD⊥平面PBC，平面BCD⋂平面PBC=BC,所以DN⊥平面PBC,因为PB⊂平面PBC,所以DN⊥PB,（3分）,因为PB⊥BD,BD⋂DN=D，所以PB⊥平面BCD，（4分），因为CD⊂平面BCD，所以PB⊥CD.（5分）

（2）由（1）可知PB⊥平面BCD，又$BD\perp CD$，以B为坐标原点，以$\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BP}$的方向分别为x轴、y轴、z轴正方向建立空间直角坐标系.则$D(2,0,0),C(2,1,0),P(0,0,2)$，

$\overrightarrow{BC}=(2,1,0),\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{BP}+\lambda\overrightarrow{PD}=(0,0,2)+\lambda(2,0,-2)=(2\lambda,0,2-2\lambda)$（7分）

设平面BCM的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，由$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$得$\begin{cases}2x+y=0\\ \lambda x+(1-\lambda)z=0\end{cases}$，

令$x=-1$得$\vec{n}=(-1,2,\frac{\lambda}{1-\lambda})$（9分） 平面$BDM$的法向量可取$\vec{m}=(0,1,0)$，（10分）

因为二面角$C-BM-D$的余弦值为$\frac{2}{3}$，所以$|\cos(\vec{m},\vec{n})|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}|=\frac{2}{\sqrt{5+(\frac{\lambda}{1-\lambda})^2}}=\frac{2}{3}$，解得$\frac{\lambda}{1-\lambda}=2$，

所以$\lambda=\dfrac{2}{3}$.（12 分）

21.解：（1）当$a=1$时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$，$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以$f'(x)=\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$.　（1 分）

设$g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x,x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,则$g'(x)=\dfrac{1-x}{x^2},x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,

当$x\in(0,1)$时，$g'(x)>0,g(x)$单调递增，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0,g(x)$单调递减，（4 分）

所以$g(x)<g(1)=0$,即$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(0,1)$，$(1,+\infty)$上单调递减.　（5 分）

（2）由$f(x)=\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$,得$f'(x)=\dfrac{1-\frac{a}{x}-\ln x+\ln a}{(x-a)^2}=\dfrac{1-\frac{a}{x}+\ln\frac{a}{x}}{(x-a)^2}$.

令$t=\dfrac{a}{x}$,$m(t)=1-t+\ln t$.由$x>2a$得$0<\dfrac{a}{x}<\dfrac{1}{2}$,即$t\in(0,\dfrac{1}{2})$.因为$m'(t)=-1+\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t}$,

所以$m'(t)>0$,所以$m(t)$在$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$上单调递增，所以$m(t)<m(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0$，即$1-\dfrac{a}{x}+\ln\dfrac{a}{x}<0$，

所以当$x\in(2a,+\infty)$时$f'(x)<0$,故$f(x)$在$(2a,+\infty)$上单调递减，所以$x\in(2a,+\infty)$时$f(x)<f(2a)=\dfrac{\ln 2}{a}$,

故原不等式转化为$\dfrac{\ln 2}{a}\leqslant\ln 2^{a-2\ln a}=(a-2\ln a)\ln 2$,即$a-\dfrac{1}{a}-2\ln a\geqslant 0$.　（9 分）

设$h(a)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a(a\geq 1)$,则$h'(a)=1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a}=\dfrac{(a-1)^2}{a^2}\geqslant 0$,所以$h(a)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

所以$h(a)\geqslant h(1)=0$,所以$f(x)<\ln 2^{a-2\ln a}$.　（12 分）

22.解：（1）依题意可知$||QM|-|QN||=||QM|-|QP||=|PM|=2<4=|MN|$，（2 分）

所以曲线C是以M、N为焦点的双曲线，设C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$，则$\begin{cases}2a=2\\ \sqrt{a^2+b^2}=2\end{cases}$，解得

$\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，所以曲线$C$的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$（4 分）

（2）设$AB:x=my+t$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,直线$A_1A:y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，令$x=2$得$y_E=\dfrac{3y_1}{x_1+1}$，直线$A_2B:y=\dfrac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，令$x=2$得$y_F=\dfrac{y_2}{x_2-1}$，因为$E$、$F$关于$x$轴对称，所以$y_E+y_F=0$,所以

$\dfrac{3y_1}{x_1+1}=-\dfrac{y_2}{x_2-1}$①，因为${x_1}^2-\dfrac{{y_1}^2}{3}=1$，所以$(x_1+1)(x_1-1)=\dfrac{{y_1}^2}{3}$，所以$\dfrac{y_1}{x_1+1}=\dfrac{3(x_1-1)}{y_1}$②，将②代入

①得 $\dfrac{9(x_1-1)}{y_1}=-\dfrac{y_2}{x_2-1}$，所以 $-y_1y_2=9(my_1+t-1)(my_2+t-1)$，（6 分）

所以 $(9m^2+1)y_1y_2+9m(t-1)(y_1+y_2)+9(t-1)^2=0$，由 $\begin{cases}x=my+t\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$

在 $\begin{cases}3m^2-1\neq 0\\\Delta=36m^2t^2-4(3m^2-1)(3t^2-3)>0\end{cases}$ 的条件下有 $y_1+y_2=-\dfrac{6mt}{3m^2-1},y_1y_2=\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}$，（8 分）

所以 $(9m^2+1)\cdot\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}+9m(t-1)(-\dfrac{6mt}{3m^2-1})+9(t-1)^2=0$，所以

$[9(3t^2-3)-54t(t-1)+27(t-1)^2]m^2+3t^2-3-9(t-1)^2=0$，所以 $3t^2-3-9(t-1)^2=0$，即

$(t-1)(t-2)=0$，（10 分）

因为直线 AB 不过点 A_1,A_2，所以 $t\neq 1$，所以 $t=2$，直线 $AB:x=my+2$ 过定点 $(2,0)$.（12 分）

思路 2：设 $E(2,t),F(2,-t)$（$t\neq 0$ 且 $t\neq\pm 3$），直线 $A_1E:y=\dfrac{t}{3}(x+1),A_2F:y=-t(x-1)$，由 $\begin{cases}y=\dfrac{t}{3}(x+1)\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=\dfrac{t^2+27}{27-t^2}\\y=\dfrac{18t}{27-t^2}\end{cases}$ 所以 $A(\dfrac{t^2+27}{27-t^2},\dfrac{18t}{27-t^2})$，同理 $B(\dfrac{t^2+3}{t^2-3},\dfrac{-6t}{t^2-3})$，所以 $k_{AB}=\dfrac{\dfrac{18t}{27-t^2}+\dfrac{6t}{t^2-3}}{\dfrac{t^2+27}{27-t^2}-\dfrac{t^2+3}{t^2-3}}=\dfrac{6t}{t^2-9}$，

（8 分）所以直线 AB 方程为 $y-\dfrac{-6t}{t^2-3}=\dfrac{6t}{t^2-9}(x-\dfrac{t^2+3}{t^2-3})$，令 $y=0$ 得 $x=\dfrac{t^2-9}{t^2-3}+\dfrac{t^2+3}{t^2-3}=\dfrac{2t^2-6}{t^2-3}=2$，

所以直线 AB 过定点 $(2,0)$.（12 分）

思路 3：证明一个性质：$k_{AA_1}\cdot k_{AA_2}=3$，（5 分）因为 E、F 关于 x 轴对称，设 $E(2,t),F(2,-t)$（$t\neq 0$ 且 $t\neq\pm 3$），则 $k_{A_1A}=k_{A_1E}=\dfrac{t}{3},k_{A_2B}=k_{A_2F}=-t$，所以 $k_{A_1A}=-\dfrac{1}{3}k_{A_2B}$，（6 分）所以 $k_{A_2A}\cdot k_{A_2B}=-9$，（7 分）利用齐次化求解，得到直线 AB 过定点 $(2,0)$.（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。